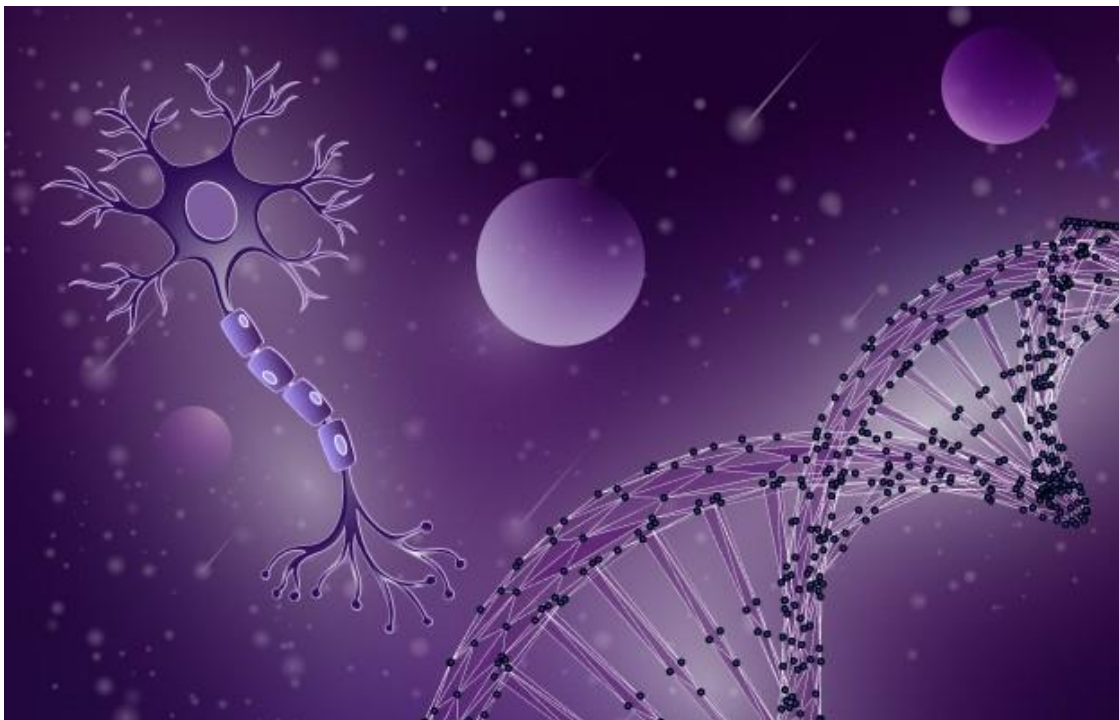


ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΚΑΙ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

«Επίλυση του Προβλήματος του σακιδίου (knapsack problem) με τη χρήση συνδυασμού Νευρωνικών Δικτύων και Εξελικτικών Αλγορίθμων»



**Της φοιτήτριας
Μουντούρη Ιωάννας
Αρ. Μητρώου: 164836**

**Επιβλέπων
Αδαμίδης Παναγιώτης
Βαθμίδα: Καθηγητής**

Ημερομηνία 22.01.2026

Επίλυση του Προβλήματος του σακιδίου (knapsack problem) με τη χρήση συνδυασμού Νευρωνικών Δικτύων και Εξελικτικών Αλγορίθμων
22174

Ονοματεπώνυμο φοιτήτριας Μουντούρη Ιωάννας

Ονοματεπώνυμο εισηγητή Αδαμίδης Παναγιώτης

Ημερομηνία ανάληψης Δ.Ε. 29.03.2023

Ημερομηνία περάτωσης Δ.Ε. 22.01.2026

Βεβαιώνω ότι είμαι ο συγγραφέας αυτής της εργασίας και ότι κάθε βοήθεια την οποία είχα για την προετοιμασία της είναι πλήρως αναγνωρισμένη και αναφέρεται στην εργασία. Επίσης, έχω καταγράψει τις όποιες πηγές από τις οποίες έκανα χρήση δεδομένων, ιδεών, εικόνων και κειμένου, είτε αυτές αναφέρονται ακριβώς είτε παραφρασμένες. Επιπλέον, βεβαιώνω ότι αυτή η εργασία προετοιμάστηκε από εμένα προσωπικά, ειδικά ως διπλωματική εργασία, στο Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής και Ηλεκτρονικών Συστημάτων του ΔΙ.ΠΑ.Ε.

Η παρούσα εργασία αποτελεί πνευματική ιδιοκτησία της φοιτήτριας Μουντούρη Ιωάννας που την εκπόνησε. Στο πλαίσιο της πολιτικής ανοικτής πρόσβασης, ο συγγραφέας/δημιουργός εκχωρεί στο Διεθνές Πανεπιστήμιο της Ελλάδος άδεια χρήσης του δικαιώματος αναπαραγωγής, δανεισμού, παρουσίασης στο κοινό και ψηφιακής διάχυσης της εργασίας διεθνώς, σε ηλεκτρονική μορφή και σε οποιοδήποτε μέσο, για διδακτικούς και ερευνητικούς σκοπούς, άνευ ανταλλάγματος. Η ανοικτή πρόσβαση στο πλήρες κείμενο της εργασίας, δεν σημαίνει καθ' οιονδήποτε τρόπο παραχώρηση δικαιωμάτων διανοητικής ιδιοκτησίας του συγγραφέα/δημιουργού, ούτε επιτρέπει την αναπαραγωγή, αναδημοσίευση, αντιγραφή, πώληση, εμπορική χρήση, διανομή, έκδοση, μεταφόρτωση (downloading), ανάρτηση (uploading), μετάφραση, τροποποίηση με οποιοδήποτε τρόπο, τμηματικά ή περιληπτικά της εργασίας, χωρίς τη ρητή προηγούμενη έγγραφη συναίνεση του συγγραφέα/δημιουργού.

Η έγκριση της διπλωματικής εργασίας από το Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής και Ηλεκτρονικών Συστημάτων του Διεθνούς Πανεπιστημίου της Ελλάδος, δεν υποδηλώνει απαραίτητα και αποδοχή των απόψεων του συγγραφέα, εκ μέρους του Τμήματος.

Πρόλογος

Επέλεξα αυτό το θέμα για τη διπλωματική μου επειδή ενδιαφερόμουν πολύ για τον τρόπο επίλυσης του προβλήματος του σακιδίου, που είναι ένα πρόβλημα που αντιμετωπίζουν πολλοί άνθρωποι στην καθημερινότητά τους. Από την έρευνα που έκανα, ανακάλυψα ότι τα νευρωνικά δίκτυα και οι εξελικτικοί αλγόριθμοι μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την επίλυση αυτού του προβλήματος με αποτελεσματικότητα. Κατά τη διάρκεια της έρευνας και της εκπόνησης της διπλωματικής μου εργασίας, απέκτησα μια πολύ βαθιά κατανόηση της λειτουργίας των νευρωνικών δικτύων και των εξελικτικών αλγορίθμων. Επίσης, απέκτησα πολλές δεξιότητες προγραμματισμού και ανάλυσης δεδομένων, καθώς χρησιμοποίησα αρκετές γλώσσες προγραμματισμού και εργαλεία ανάλυσης δεδομένων για την υλοποίηση της μεθόδου μου. Τέλος, η διπλωματική μου εργασία με βοήθησε να αποκτήσω πολύτιμες δεξιότητες έρευνας και ανάλυσης δεδομένων, οι οποίες θα μου φανούν χρήσιμες στο μέλλον για τις ακαδημαϊκές και επαγγελματικές μου δραστηριότητες. Επιπλέον, με την επιτυχή ολοκλήρωση της διπλωματικής μου εργασίας, απέκτησα μια αίσθηση επίτευξης που μου έδωσε την αυτοπεποίθηση να αντιμετωπίσω προκλήσεις στο μέλλον. Συνολικά, η επιλογή αυτού του θέματος για τη διπλωματική μου εργασία ήταν μια εξαιρετική ευκαιρία για μάθηση και ανάπτυξη, και μου προσέφερε πολλά οφέλη πέρα από την απλή απόκτηση ενός πτυχίου.

Περίληψη

Το πρόβλημα του σακιδίου αποτελεί ένα κλασικό πρόβλημα συνδυαστικής βελτιστοποίησης, το οποίο εμφανίζεται σε πλήθος εφαρμογών που σχετίζονται με την κατανομή περιορισμένων πόρων. Στην παρούσα εργασία εξετάζεται η επίλυση του προβλήματος 0-1 σακιδίου μέσω μιας υβριδικής προσέγγισης που συνδυάζει τεχνικές μηχανικής μάθησης και εξελικτικούς αλγόριθμους. Συγκεκριμένα, υλοποιείται ένας γενετικός αλγόριθμος, του οποίου μέρος του αρχικού πληθυσμού παράγεται με τη χρήση ενός πολυεπίπεδου νευρωνικού δικτύου, με στόχο τη δημιουργία αρχικών λύσεων που λαμβάνουν υπόψη βασικά χαρακτηριστικά των αντικειμένων.

Η προτεινόμενη μέθοδος εφαρμόζεται σε τυχαία στιγμιότυπα του προβλήματος για διαφορετικά μεγέθη, καλύπτοντας μικρά, μεσαία και μεγαλύτερα προβλήματα. Για κάθε περίπτωση, τα αποτελέσματα συγκρίνονται με τη λύση αναφοράς που προκύπτει από ακέραιο γραμμικό προγραμματισμό (Mixed Integer Linear Programming, MILP), η οποία θεωρείται βέλτιστη. Η σύγκριση βασίζεται στη συνολική αξία και στο συνολικό βάρος της λύσης, καθώς και στη σχετική απόκλιση από τη βέλτιστη λύση αναφοράς, η οποία εκφράζεται μέσω του optimality gap. Επιπλέον, εξετάζεται η εξελικτική πορεία του γενετικού αλγόριθμου, μέσω της καταγραφής της μέγιστης και της μέσης τιμής καταλληλότητας ανά γενιά.

Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι, για τα εξεταζόμενα μεγέθη προβλήματος, η υβριδική προσέγγιση μπορεί να προσεγγίσει τη λύση αναφοράς του MILP με μικρή σχετική απόκλιση, η οποία κυμαίνεται από μηδενικές τιμές έως χαμηλά ποσοστά, ανάλογα με το μέγεθος του προβλήματος και το εκάστοτε στιγμιότυπο δεδομένων. Παράλληλα, παρατηρείται ότι η καλύτερη λύση του γενετικού αλγόριθμου σταθεροποιείται μετά από περιορισμένο αριθμό γενεών, χωρίς περαιτέρω μεταβολή στις τελικές τιμές. Τα αποτελέσματα συνοδεύονται από γραφικές απεικονίσεις της εξελικτικής διαδικασίας και της τελικής επιλογής αντικειμένων, οι οποίες διευκολύνουν την ανάλυση και τη σύγκριση μεταξύ διαφορετικών μεγεθών προβλήματος.

«Solving the knapsack problem using a combination of Neural Networks and Evolutionary Algorithms»

«Ioanna Mountouri»

Abstract

The knapsack problem is a classical combinatorial optimization problem that arises in a wide range of applications related to resource allocation. This thesis investigates the solution of the 0–1 knapsack problem using a hybrid approach that combines machine learning techniques with evolutionary algorithms. In particular, a genetic algorithm is implemented, where part of the initial population is generated using a multilayer neural network, aiming to incorporate basic item characteristics into the initial solution set.

The proposed method is applied to randomly generated problem instances of varying sizes, including small, medium, and larger-scale cases. For each instance, the results are compared with a reference solution obtained through mixed integer linear programming (MILP), which is considered optimal. The comparison is based on the total value and total weight of the solution, as well as on the relative deviation from the optimal reference solution, expressed through the optimality gap. In addition, the evolutionary behavior of the genetic algorithm is examined by tracking the maximum and average fitness values across generations.

The results indicate that, for the examined problem sizes, the hybrid approach can approximate the MILP reference solution with a small relative deviation, ranging from zero to low percentage values depending on the problem size and the specific instance. Moreover, the best solution identified by the genetic algorithm typically stabilizes after a limited number of generations, with no further changes observed in subsequent iterations. The results are accompanied by graphical representations of the evolutionary process and the final item selection, facilitating the analysis and comparison across different problem scales.

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να εκφράσω τις ειλικρινείς και θερμές μου ευχαριστίες στην οικογένειά μου, η οποία υπήρξε σταθερό στήριγμα σε όλη τη διάρκεια των σπουδών μου και ιδιαίτερα κατά την εκπόνηση της παρούσας διπλωματικής εργασίας. Πρωτίστως, ευχαριστώ από καρδιάς τους γονείς μου, Στέλιο και Μαρία, για την αδιάκοπη αγάπη, την εμπιστοσύνη και την υποστήριξή τους, τόσο σε πρακτικό όσο και σε συναισθηματικό επίπεδο. Η καθοδήγηση, η υπομονή και οι αξίες που μου μετέδωσαν αποτέλεσαν καθοριστικό παράγοντα για την ακαδημαϊκή και προσωπική μου πορεία. Ιδιαίτερες ευχαριστίες αξίζουν στις αδελφές μου, Φωτεινή και Κωνσταντίνα, για τη διαρκή ενθάρρυνση, την κατανόηση και τη θετική τους ενέργεια. Η παρουσία τους, οι συζητήσεις μας και η στήριξή τους στις απαιτητικές στιγμές της προσπάθειας αυτής με βοήθησαν να διατηρήσω την ψυχραιμία και το κίνητρό μου μέχρι την ολοκλήρωση της εργασίας.

Πίνακας Περιεχομένων

Πρόλογος.....	iv
Περίληψη.....	v
Abstract	vi
Ευχαριστίες	vii
Συντομογραφίες.....	x
Πίνακας Γραφημάτων	xi
Κεφάλαιο 1ο: Εισαγωγή.....	1
1.1 Παρουσίαση του προβλήματος βελτιστοποίησης	1
1.2 Κίνητρο	1
1.3 Στόχοι	2
1.4 Δομή και οργάνωση της εργασίας.....	2
Κεφάλαιο 2ο: Το Πρόβλημα του Σακιδίου	4
2.1 Ορισμός του προβλήματος 0–1 Knapsack	4
2.2 Μαθηματική διατύπωση.....	4
2.3 Κύριες παραλλαγές του προβλήματος.....	5
2.4 Υπολογιστική πολυπλοκότητα και NP-hard φύση.....	6
Κεφάλαιο 3ο: Κλασικές Μέθοδοι Επίλυσης.....	7
3.1 Γραμμικός και ακέραιος γραμμικός προγραμματισμός (LP / MILP).....	7
3.2 Ο αλγόριθμος Simplex	7
3.3 Μέθοδοι Branch-and-Bound	8
3.4 Συγκριτική ανάλυση πλεονεκτημάτων και περιορισμών	9
Κεφάλαιο 4ο: Εξελικτικοί Αλγόριθμοι & Γενετικοί Αλγόριθμοι	10
4.1 Βασικές έννοιες εξελικτικών και γενετικών αλγορίθμων	10
4.2 Δυαδική αναπαράσταση λύσεων.....	10
4.3 Τελεστές επιλογής, ανασυνδυασμού και μετάλλαξης.....	11
4.4 Καταλληλότητα των γενετικών αλγορίθμων για το πρόβλημα του σακιδίου	12
Κεφάλαιο 5ο: Νευρωνικά Δίκτυα για Προσεγγιστική Βελτιστοποίηση	13
5.1 Βασικές αρχές των νευρωνικών δικτύων	13
5.2 Πολυεπίπεδο Νευρωνικό Δίκτυο.....	14
5.3 Ρόλος των νευρωνικών δικτύων ως ευρετικοί μηχανισμοί καθοδήγησης.....	15
5.4 Περιορισμοί των νευρωνικών δικτύων ως ακριβείς επιλύτες	15
Κεφάλαιο 6ο: Υβριδικές Προσεγγίσεις Νευρωνικών Δικτύων και Εξελικτικών Αλγορίθμων στο Πρόβλημα του Σακιδίου.....	17
6.1 Υβριδικές Μέθοδοι Νευρωνικών Δικτύων και Εξελικτικών Αλγορίθμων	17

6.2	Κατηγοριοποίηση υβριδικών προσεγγίσεων Νευρωνικών Δικτύων και Εξελικτικών Αλγορίθμων.....	17
6.3	Υβριδικές μέθοδοι Νευρωνικών Δικτύων και Εξελικτικών Αλγορίθμων για το Πρόβλημα του Σακιδίου.....	18
6.4	Σύγκριση και περιορισμοί των υβριδικών μεθόδων.....	19
6.5	Θέση της προτεινόμενης μεθόδου στη βιβλιογραφία.....	20
Κεφάλαιο 7ο: Υβριδική Μέθοδος NN + GA		21
7.1	Αρχιτεκτονική και λειτουργία του νευρωνικού δικτύου	21
7.2	Δομή και λειτουργία του γενετικού αλγορίθμου (GA)	22
7.3	Στρατηγική συνδυασμού νευρωνικού δικτύου και γενετικού αλγορίθμου	23
7.4	Διαχείριση εφικτότητας και περιορισμών	23
Κεφάλαιο 8ο: Υλοποίηση και Πειραματική Διαδικασία.....		25
8.1	Υπολογιστικό περιβάλλον και εργαλεία υλοποίησης.....	25
8.2	Δημιουργία και χαρακτηριστικά των δεδομένων.....	25
8.3	Νευρωνικό Δίκτυο: Είσοδος, Έξοδος και Ρόλος στο Υβριδικό Σχήμα.....	26
8.4	Ρύθμιση παραμέτρων αλγορίθμων	27
8.5	Πειραματική διαδικασία και πρωτόκολλο εκτέλεσης	28
8.6	Κλίμακα και μεγέθη προβλημάτων	28
Κεφάλαιο 9ο: Αποτελέσματα και Σύγκριση		30
9.1	Πειραματική διάταξη και μετρικές αξιολόγησης	30
9.2	Αποτελέσματα για μικρής κλίμακας στιγμιότυπα (N = 10)	30
9.3	Αποτελέσματα για μεσαίας κλίμακας στιγμιότυπα (N = 50)	36
9.4	Αποτελέσματα για μεγάλης κλίμακας στιγμιότυπα (N = 200).....	41
9.5	Συγκριτική ανάλυση αποτελεσμάτων ως προς το μέγεθος του προβλήματος	46
Κεφάλαιο 10ο: Συζήτηση Αποτελεσμάτων.....		47
10.1	Ερμηνεία αποτελεσμάτων	47
10.2	Επίτευξη βέλτιστης λύσης σε προβλήματα μικρής κλίμακας	48
10.3	Συμπεριφορά προσεγγιστικής βελτιστοποίησης σε προβλήματα μεγάλης κλίμακας	49
10.4	Πλεονεκτήματα και περιορισμοί της υβριδικής προσέγγισης NN + GA	49
Κεφάλαιο 11ο: Συμπεράσματα & Μελλοντική Εργασία		52
Κεφάλαιο 12ο: Βιβλιογραφία.....		53
Κεφάλαιο 13ο: Παράρτημα.....		56

Συντομογραφίες

KP (Knapsack Problem)

Πρόβλημα Σακιδίου

0-1 KP (0-1 Knapsack Problem)

Διαδικό πρόβλημα σακιδίου, όπου κάθε αντικείμενο είτε επιλέγεται είτε απορρίπτεται

GA (Genetic Algorithm)

Γενετικός αλγόριθμος

EA (Evolutionary Algorithm)

Εξελικτικός αλγόριθμος

NN (Neural Network)

Νευρωνικό δίκτυο

MLP (Multilayer Perceptron)

Πολυεπίπεδο νευρωνικό δίκτυο τύπου perceptron

GA+NN (Hybrid Genetic Algorithm with Neural Network Initialization)

Υβριδικός γενετικός αλγόριθμος με αρχικοποίηση μέσω νευρωνικού δικτύου

ML (Machine Learning)

Μηχανική μάθηση

MILP (Mixed Integer Linear Programming)

Μικτός ακέραιος γραμμικός προγραμματισμός

LP (Linear Programming)

Γραμμικός προγραμματισμός

Πίνακας Γραφημάτων

Γράφημα 1: Αναπαράσταση των αντικειμένων στον χώρο βάρους-αξίας και της τελικής επιλεγμένης λύσης για $N = 10$.	31
Γράφημα 2: Αναπαράσταση των αντικειμένων στον χώρο βάρους-αξίας και της τελικής λύσης που παρήγαγε η υβριδική μέθοδος GA+NN για πρόβλημα σακιδίου με $N = 10$ αντικείμενα.	32
Γράφημα 3: Αναπαράσταση των αντικειμένων στον χώρο βάρους-αξίας και της τελικής λύσης που υπολογίστηκε από τον ακριβή επιλύτη MILP για πρόβλημα σακιδίου με $N = 10$ αντικείμενα.	33
Γράφημα 4: Σύγκλιση του γενετικού αλγορίθμου για πρόβλημα μεγέθους $N = 10$ με αναφορά στη βέλτιστη λύση MILP.	34
Γράφημα 5: Εξέλιξη του βέλτιστου κενού (optimality gap) ως προς τη λύση MILP για $N = 10$.	35
Γράφημα 6: Κατανομή αντικειμένων στο επίπεδο βάρους-αξίας για $N = 50$ και τελική επιλογή του υβριδικού αλγορίθμου (GA+NN).	36
Γράφημα 7: Αναπαράσταση των αντικειμένων στον χώρο βάρους-αξίας και της τελικής λύσης που προέκυψε από τη μέθοδο greedy για πρόβλημα σακιδίου με $N = 50$ αντικείμενα.	37
Γράφημα 8: Αναπαράσταση των αντικειμένων στον χώρο βάρους-αξίας και της τελικής λύσης που υπολογίστηκε από τον επιλύτη MILP για πρόβλημα σακιδίου με $N = 50$ αντικείμενα.	38
Γράφημα 9: Σύγκλιση γενετικού αλγορίθμου με αναφορά στη βέλτιστη λύση MILP για $N = 50$.	39
Γράφημα 10: Εξέλιξη του βέλτιστου κενού (optimality gap) ανά γενιά για $N = 50$.	40
Γράφημα 11: Διάγραμμα διασποράς βάρους-αξίας των αντικειμένων για $N = 200$, με επισήμανση των επιλεγμένων αντικειμένων από τον υβριδικό αλγόριθμο.	41
Γράφημα 12: Αναπαράσταση των αντικειμένων στον χώρο βάρους-αξίας και της τελικής λύσης που προέκυψε από τη μέθοδο greedy για πρόβλημα σακιδίου με $N = 200$ αντικείμενα.	42
Γράφημα 13: Αναπαράσταση των αντικειμένων στον χώρο βάρους-αξίας και της τελικής λύσης που υπολογίστηκε από τον επιλύτη MILP για πρόβλημα σακιδίου με $N = 200$ αντικείμενα.	43
Γράφημα 14: Διάγραμμα σύγκλισης του Γενετικού Αλγορίθμου για $N = 200$, με απεικόνιση της μέγιστης και μέσης καταλληλότητας και αναφορά στη βέλτιστη λύση MILP.	44
Γράφημα 15: Διάγραμμα εξέλιξης του ποσοστού απόκλισης από τη βέλτιστη λύση (optimality gap) για $N = 200$.	45

Κεφάλαιο 1ο: Εισαγωγή

1.1 Παρουσίαση του προβλήματος βελτιστοποίησης

Το πρόβλημα του σακιδίου (0–1 Knapsack Problem) αποτελεί ένα από τα κλασικά προβλήματα της συνδυαστικής βελτιστοποίησης και έχει μελετηθεί εκτενώς τόσο στη θεωρητική πληροφορική όσο και στην επιχειρησιακή έρευνα (Martello and Toth, 1990; Korte and Vygen, 2006). Στη βασική του μορφή, το πρόβλημα αφορά την επιλογή ενός υποσυνόλου αντικειμένων από ένα πεπερασμένο σύνολο, με στόχο τη μεγιστοποίηση της συνολικής αξίας, υπό τον περιορισμό ότι το συνολικό βάρος των επιλεγμένων αντικειμένων δεν υπερβαίνει μια δεδομένη χωρητικότητα. Κάθε αντικείμενο μπορεί είτε να επιλεγεί είτε να απορριφθεί, γεγονός που οδηγεί σε δυαδική αναπαράσταση των λύσεων και σε εκθετική αύξηση του χώρου αναζήτησης ως προς τον αριθμό των αντικειμένων (Papadimitriou and Steiglitz, 1998).

Η σημασία του προβλήματος δεν περιορίζεται στη θεωρητική του διάσταση. Το 0–1 πρόβλημα του σακιδίου εμφανίζεται σε πλήθος εφαρμογών, όπως η κατανομή περιορισμένων πόρων, ο προγραμματισμός παραγωγής, η επιλογή επενδυτικών έργων και η διαχείριση χωρητικότητας σε συστήματα με ανταγωνιστικούς περιορισμούς (Martello and Toth, 1990). Λόγω της γενικότητάς του, το πρόβλημα χρησιμοποιείται συχνά ως πρότυπο μοντέλο για την αξιολόγηση αλγοριθμικών τεχνικών βελτιστοποίησης και τη σύγκριση διαφορετικών μεθοδολογικών προσεγγίσεων (Korte and Vygen, 2006).

Από υπολογιστική άποψη, το πρόβλημα του σακιδίου ανήκει στην κατηγορία των NP-hard προβλημάτων. Αυτό συνεπάγεται ότι δεν είναι γνωστός αλγόριθμος πολυωνυμικού χρόνου που να επιλύει όλες τις περιπτώσεις του προβλήματος, εκτός αν ισχύει $P = NP$ (Garey and Johnson, 2003; Cormen et al., 2022). Παρότι υπάρχουν ακριβείς μέθοδοι επίλυσης, όπως η δυναμική προγραμματιστική προσέγγιση, οι αλγόριθμοι branch-and-bound και η διατύπωση ως πρόβλημα ακέραιου γραμμικού προγραμματισμού, η υπολογιστική τους απαίτηση αυξάνεται σημαντικά καθώς το μέγεθος του προβλήματος μεγαλώνει (Martello and Toth, 1990).

Η παραπάνω υπολογιστική δυσκολία έχει οδηγήσει στην ανάπτυξη και χρήση ευρετικών και μεταευρετικών μεθόδων, οι οποίες επιδιώκουν την παραγωγή λύσεων υψηλής ποιότητας χωρίς εγγύηση βέλτιστου αποτελέσματος, αλλά με σαφώς μειωμένο υπολογιστικό κόστος (Blum et al., 2011). Στο πλαίσιο αυτό, το πρόβλημα του σακιδίου χρησιμοποιείται ευρέως ως πεδίο πειραματικής αξιολόγησης τέτοιων μεθόδων, καθώς επιτρέπει τη μελέτη της συμπεριφοράς τους ως προς τη σύγκλιση, την κλιμακωσιμότητα και την απόκλιση από τη βέλτιστη λύση.

1.2 Κίνητρο

Η μελέτη του προβλήματος του σακιδίου παραμένει επίκαιρη λόγω της διττής του σημασίας: αφενός αποτελεί θεμελιώδες πρόβλημα της συνδυαστικής βελτιστοποίησης, αφετέρου λειτουργεί ως αντιπροσωπευτικό μοντέλο για την αξιολόγηση αλγοριθμικών μεθόδων σε περιβάλλοντα με εκθετικά αυξανόμενο χώρο λύσεων. Παρά τη διαθεσιμότητα ακριβών μεθόδων επίλυσης, όπως ο ακέραιος γραμμικός προγραμματισμός και οι αλγόριθμοι branch-and-bound, η πρακτική εφαρμογή τους περιορίζεται από τον αυξανόμενο υπολογιστικό φόρτο καθώς το μέγεθος του προβλήματος μεγαλώνει (Martello and Toth, 1990; Garey and Johnson, 2003).

Οι εξελικτικοί αλγόριθμοι και γενικότερα οι μεταερευτικές μέθοδοι έχουν χρησιμοποιηθεί εκτενώς για την αντιμετώπιση τέτοιων προβλημάτων, καθώς προσφέρουν ευελιξία και δυνατότητα εξερεύνησης μεγάλων χώρων λύσεων χωρίς αυστηρές προϋποθέσεις για τη δομή του προβλήματος. Ωστόσο, η απόδοσή τους εξαρτάται σε σημαντικό βαθμό από την ποιότητα της αρχικοποίησης και από τις στρατηγικές εξερεύνησης και εκμετάλλευσης που υιοθετούνται (Blum et al., 2011).

Το κίνητρο της παρούσας εργασίας εδράζεται στην ανάγκη κατανόησης του τρόπου με τον οποίο ένας υβριδικός συνδυασμός νευρωνικού δικτύου και γενετικού αλγορίθμου μπορεί να βελτιώσει τη συμπεριφορά ενός κλασικού εξελικτικού αλγορίθμου στην πράξη. Αντί της ανάπτυξης νέας θεωρητικής μεθόδου, το ενδιαφέρον επικεντρώνεται στη συστηματική αξιολόγηση της πρακτικής απόδοσης μιας υβριδικής προσέγγισης, στη σύγκρισή της με ακριβείς μεθόδους αναφοράς και στη μελέτη της κλιμάκωσής της ως προς το μέγεθος του προβλήματος.

1.3 Στόχοι

Βασικός στόχος της εργασίας είναι η πειραματική μελέτη της επίλυσης του 0–1 προβλήματος του σακιδίου μέσω ενός υβριδικού αλγορίθμου που συνδυάζει νευρωνικό δίκτυο και γενετικό αλγόριθμο. Ειδικότερα, επιδιώκεται η διερεύνηση της επίδρασης της χρήσης ενός πολυστρωματικού νευρωνικού δικτύου ως μηχανισμού παραγωγής αρχικών λύσεων στη συμπεριφορά και στη σύγκλιση ενός γενετικού αλγορίθμου.

Περαιτέρω στόχος είναι η ποσοτική αξιολόγηση της ποιότητας των λύσεων που παράγονται από τον υβριδικό αλγόριθμο, μέσω σύγκρισης με τη βέλτιστη λύση που προκύπτει από ακριβή επίλυση με ακέραιο γραμμικό προγραμματισμό. Η σύγκριση αυτή επιτρέπει την ανάλυση της απόκλισης από τη βέλτιστη λύση και την εκτίμηση του optimality gap για διαφορετικά μεγέθη προβλήματος. Παράλληλα, εξετάζεται η συμπεριφορά του αλγορίθμου ως προς τη σύγκλιση και η κλιμάκωσή του όταν αυξάνεται ο αριθμός των αντικειμένων.

Τέλος, στόχος της εργασίας είναι η αποτύπωση των πλεονεκτημάτων και των περιορισμών της υβριδικής προσέγγισης, χωρίς την αξίωση καθολικής υπεροχής έναντι άλλων μεθόδων. Η ανάλυση επικεντρώνεται στην κατανόηση του πότε και υπό ποιες συνθήκες μια τέτοια προσέγγιση μπορεί να θεωρηθεί λειτουργική και αποδοτική.

1.4 Δομή και οργάνωση της εργασίας

Η εργασία οργανώνεται σε έντεκα κεφάλαια. Στο πρώτο κεφάλαιο παρουσιάζεται το πρόβλημα, το κίνητρο και οι στόχοι της μελέτης, καθώς και η συνολική διάρθρωση της εργασίας. Το δεύτερο κεφάλαιο εισάγει το 0–1 πρόβλημα του σακιδίου, παρουσιάζοντας τον τυπικό ορισμό του, τη μαθηματική διατύπωση και βασικές παραλλαγές, καθώς και τη φύση της υπολογιστικής του δυσκολίας.

Στο τρίτο κεφάλαιο εξετάζονται κλασικές ακριβείς μέθοδοι επίλυσης, με έμφαση στον γραμμικό και ακέραιο γραμμικό προγραμματισμό, καθώς και σε αλγορίθμους αναζήτησης όπως το branch-and-bound. Το τέταρτο κεφάλαιο επικεντρώνεται στους εξελικτικούς αλγορίθμους και ειδικότερα στους γενετικούς αλγορίθμους, παρουσιάζοντας τις βασικές έννοιες και τελεστές τους. Στο πέμπτο κεφάλαιο παρουσιάζονται βασικές έννοιες νευρωνικών δικτύων και ο ρόλος τους ως προσεγγιστικών μηχανισμών σε προβλήματα βελτιστοποίησης.

Το έκτο κεφάλαιο περιλαμβάνει τις υβριδικές προσεγγίσεις των νευρωνικών δικτύων και εξελικτικών αλγορίθμων για το πρόβλημα του σακιδίου. Το έβδομο κεφάλαιο αποτελεί το κεντρικό θεωρητικό και τεχνικό μέρος της εργασίας και περιγράφει αναλυτικά την υβριδική μέθοδο συνδυασμού νευρωνικού

δικτύου και γενετικού αλγορίθμου. Στο όγδοο κεφάλαιο παρουσιάζεται η υλοποίηση και η πειραματική διαδικασία, ενώ στο ένατο κεφάλαιο αναλύονται τα πειραματικά αποτελέσματα για διαφορετικά μεγέθη προβλήματος. Το δέκατο κεφάλαιο αφιερώνεται στη συζήτηση και ερμηνεία των αποτελεσμάτων. Τέλος, στο ενδέκατο κεφάλαιο συνοψίζονται τα συμπεράσματα της εργασίας και προτείνονται κατευθύνσεις για μελλοντική έρευνα.

Κεφάλαιο 2ο: Το Πρόβλημα του Σακιδίου

2.1 Ορισμός του προβλήματος 0–1 Knapsack

Το 0–1 πρόβλημα του σακιδίου (0–1 Knapsack Problem) αποτελεί βασικό πρόβλημα της συνδυαστικής βελτιστοποίησης και χρησιμοποιείται εκτενώς ως πρότυπο μοντέλο για τη μελέτη αλγοριθμικών τεχνικών σε προβλήματα με διακριτές αποφάσεις. Στη συγκεκριμένη εκδοχή του προβλήματος, κάθε αντικείμενο μπορεί είτε να επιλεγεί είτε να απορριφθεί, χωρίς τη δυνατότητα μερικής επιλογής ή πολλαπλών αντιγράφων, γεγονός που δικαιολογεί τον χαρακτηρισμό “0–1” (Martello and Toth, 1990).

Τυπικά, δίνεται ένα σύνολο παντικειμένων, όπου κάθε αντικείμενο *ι* χαρακτηρίζεται από ένα βάρος $w_i > 0$ και μία αξία $v_i > 0$. Δίνεται επίσης μία μέγιστη χωρητικότητα W , η οποία εκφράζει τον περιορισμό του σακιδίου. Στόχος είναι η επιλογή ενός υποσυνόλου αντικειμένων τέτοιου ώστε το άθροισμα των βαρών τους να μην υπερβαίνει τη χωρητικότητα και, ταυτόχρονα, το άθροισμα των αξιών τους να μεγιστοποιείται (Papadimitriou and Steiglitz, 1998).

Η απόφαση για κάθε αντικείμενο μοντελοποιείται μέσω μιας δυαδικής μεταβλητής απόφασης $x_i \in \{0,1\}$, όπου η τιμή $x_i = 1$ δηλώνει ότι το αντικείμενο επιλέγεται, ενώ η τιμή $x_i = 0$ δηλώνει ότι απορρίπτεται. Με βάση αυτή τη διατύπωση, το πρόβλημα μπορεί να εκφραστεί ως πρόβλημα ακέραιου γραμμικού προγραμματισμού με μία γραμμική αντικειμενική συνάρτηση και έναν γραμμικό περιορισμό χωρητικότητας (Korte and Vygen, 2006).

Η απλότητα της διατύπωσης έρχεται σε αντίθεση με την υπολογιστική δυσκολία του προβλήματος. Ο αριθμός των δυνατών λύσεων αυξάνεται εκθετικά ως 2^n , γεγονός που καθιστά την εξαντλητική αναζήτηση μη πρακτική ακόμη και για μέτριες τιμές του n . Παρότι το πρόβλημα έχει μελετηθεί εκτενώς και έχουν αναπτυχθεί ακριβείς αλγόριθμοι, όπως μέθοδοι δυναμικού προγραμματισμού και branch-and-bound, το 0–1 πρόβλημα του σακιδίου ανήκει στην κατηγορία των NP-hard προβλημάτων, γεγονός που περιορίζει τη δυνατότητα αποδοτικής επίλυσης σε γενική περίπτωση (Garey and Johnson, 2003).

Λόγω αυτών των χαρακτηριστικών, το 0–1 knapsack χρησιμοποιείται συχνά ως σημείο αναφοράς για τη σύγκριση ακριβών, προσεγγιστικών και ευρετικών μεθόδων επίλυσης. Η σαφής και τυποποιημένη του διατύπωση επιτρέπει την άμεση αξιολόγηση της ποιότητας των παραγόμενων λύσεων και διευκολύνει τη μελέτη της συμπεριφοράς διαφορετικών αλγοριθμικών προσεγγίσεων υπό κοινό πλαίσιο αναφοράς (Martello and Toth, 1990).

2.2 Μαθηματική διατύπωση

Το 0–1 πρόβλημα του σακιδίου διατυπώνεται τυπικά ως πρόβλημα ακέραιου γραμμικού προγραμματισμού, στο οποίο οι μεταβλητές απόφασης λαμβάνουν δυαδικές τιμές. Έστω ένα σύνολο παντικειμένων, όπου κάθε αντικείμενο $i = 1, \dots, n$ χαρακτηρίζεται από βάρος $w_i > 0$ και αξία $v_i > 0$. Επιπλέον, έστω $W > 0$ διαθέσιμη χωρητικότητα του σακιδίου. Για κάθε αντικείμενο ορίζεται δυαδική μεταβλητή απόφασης $x_i \in \{0,1\}$, η οποία δηλώνει αν το αντικείμενο επιλέγεται ή όχι.

Με βάση τα παραπάνω, η μαθηματική διατύπωση του προβλήματος έχει ως εξής (Martello and Toth, 1990; Korte and Vygen, 2006):

$$\max \sum_{i=1}^n v_i x_i$$

υπό τους περιορισμούς

$$\sum_{i=1}^n w_i x_i \leq W,$$
$$x_i \in \{0,1\}, i = 1, \dots, n.$$

Η αντικειμενική συνάρτηση εκφράζει τη μεγιστοποίηση της συνολικής αξίας των επιλεγμένων αντικειμένων, ενώ ο περιορισμός χωρητικότητας διασφαλίζει ότι το συνολικό βάρος δεν υπερβαίνει το επιτρεπτό όριο. Ο δυαδικός χαρακτήρας των μεταβλητών αποκλείει τη μερική επιλογή αντικειμένων και διαφοροποιεί το 0–1 πρόβλημα του σακιδίου από τις αντίστοιχες κλασματικές εκδοχές του.

Η παραπάνω διατύπωση καθιστά σαφές ότι το πρόβλημα ανήκει στην κλάση των προβλημάτων ακέραιου γραμμικού προγραμματισμού. Αν ο περιορισμός ακεραιότητας χαλαρώσει σε $0 \leq x_i \leq 1$, προκύπτει το κλασματικό πρόβλημα του σακιδίου, το οποίο επιλύεται σε πολυωνυμικό χρόνο μέσω άπληστων αλγορίθμων. Αντίθετα, η απαίτηση δυαδικών μεταβλητών οδηγεί σε εκθετικό χώρο λύσεων και αποτελεί την κύρια πηγή της υπολογιστικής δυσκολίας του προβλήματος (Papadimitriou and Steiglitz, 1998).

2.3 Κύριες παραλλαγές του προβλήματος

Πέραν της βασικής 0–1 εκδοχής, το πρόβλημα του σακιδίου έχει μελετηθεί σε πλήθος παραλλαγών, οι οποίες προκύπτουν από διαφοροποιήσεις στους περιορισμούς επιλογής και στη δομή του προβλήματος. Οι παραλλαγές αυτές διατηρούν τον πυρήνα της βελτιστοποίησης υπό περιορισμό χωρητικότητας, αλλά παρουσιάζουν διαφορετικά υπολογιστικά χαρακτηριστικά και απαιτούν εξειδικευμένες μεθόδους επίλυσης (Martello and Toth, 1990).

Μία από τις απλούστερες παραλλαγές είναι το κλασματικό πρόβλημα του σακιδίου (fractional knapsack), στο οποίο επιτρέπεται η μερική επιλογή αντικειμένων. Στην περίπτωση αυτή, οι μεταβλητές απόφασης λαμβάνουν συνεχείς τιμές στο διάστημα $[0, 1]$, και το πρόβλημα επιλύεται αποδοτικά σε πολυωνυμικό χρόνο μέσω άπληστου αλγορίθμου που βασίζεται στον λόγο αξίας προς βάρος (Papadimitriou and Steiglitz, 1998).

Μία δεύτερη κλασική παραλλαγή είναι το bounded knapsack problem, όπου κάθε αντικείμενο μπορεί να επιλεγεί περισσότερες από μία φορές, αλλά μέχρι έναν προκαθορισμένο ακέραιο αριθμό. Το πρόβλημα αυτό μπορεί να μετασχηματιστεί σε ισοδύναμο 0–1 knapsack μέσω κατάλληλων τεχνικών διάσπασης, αν και το μέγεθος του προβλήματος αυξάνεται (Martello and Toth, 1990).

Στην περίπτωση του unbounded knapsack problem, δεν υπάρχει ανώτατο όριο στον αριθμό φορών που μπορεί να επιλεγεί κάθε αντικείμενο. Η παραλλαγή αυτή διαφοροποιείται ουσιαστικά από το 0–1 πρόβλημα και συνδέεται στενά με τεχνικές δυναμικού προγραμματισμού, διατηρώντας ωστόσο την NP-hard φύση της στη γενική περίπτωση (Korte and Vygen, 2006).

Τέλος, ιδιαίτερη σημασία έχει το multiple knapsack problem, στο οποίο υπάρχουν πολλαπλά σακίδια με διαφορετικές χωρητικότητες και κάθε αντικείμενο μπορεί να τοποθετηθεί σε το πολύ ένα από αυτά. Η παραλλαγή αυτή γενικεύει το 0–1 knapsack και αυξάνει περαιτέρω την πολυπλοκότητα του

προβλήματος, καθιστώντας το αντικείμενο εκτεταμένης έρευνας τόσο για ακριβείς όσο και για ευρετικές μεθόδους (Martello and Toth, 1990).

2.4 Υπολογιστική πολυπλοκότητα και NP-hard φύση

Το 0–1 πρόβλημα του σακιδίου κατατάσσεται στην κατηγορία των NP-hard προβλημάτων, γεγονός που αποτελεί κεντρικό στοιχείο για την κατανόηση της υπολογιστικής του δυσκολίας. Η ταξινόμηση αυτή υποδηλώνει ότι, στη γενική περίπτωση, δεν είναι γνωστός αλγόριθμος πολυωνυμικού χρόνου που να επιλύει το πρόβλημα για όλες τις δυνατές εισόδους, εκτός αν ισχύει η ισότητα $P = NP$ (Garey and Johnson, 2003).

Η NP-hard φύση του 0–1 knapsack τεκμηριώνεται μέσω πολυωνυμικών αναγωγών από άλλα γνωστά NP-complete προβλήματα. Συγκεκριμένα, το πρόβλημα **subset sum**, το οποίο αποτελεί ειδική περίπτωση του προβλήματος του σακιδίου όπου οι αξίες ταυτίζονται με τα βάρη, είναι NP-complete. Η ύπαρξη πολυωνυμικής αναγωγής από το subset sum στο 0–1 knapsack συνεπάγεται ότι το τελευταίο είναι τουλάχιστον εξίσου δύσκολο από άποψη υπολογιστικής πολυπλοκότητας (Garey and Johnson, 2003). Ως εκ τούτου, το 0–1 knapsack θεωρείται NP-hard ως πρόβλημα βελτιστοποίησης.

Η υπολογιστική δυσκολία του προβλήματος αντανακλάται και στο μέγεθος του χώρου λύσεων. Για ένα σύνολο παντικειμένων, ο αριθμός των δυνατών συνδυασμών επιλογής είναι 2^n , γεγονός που καθιστά την εξαντλητική αναζήτηση πρακτικά ανεφάρμοστη ακόμη και για μέτριες τιμές του n . Παρότι υπάρχουν αλγόριθμοι δυναμικού προγραμματισμού με ψευδοπολυωνυμικό χρόνο, αυτοί εξαρτώνται από το μέγεθος των αριθμητικών παραμέτρων (π.χ. τη χωρητικότητα W) και όχι μόνο από το πλήθος των αντικειμένων, και επομένως δεν αναιρούν τη θεωρητική NP-hard φύση του προβλήματος (Papadimitriou and Steiglitz, 1998; Cormen et al., 2022).

Η διάκριση αυτή μεταξύ ψευδοπολυωνυμικών και πολυωνυμικών αλγορίθμων είναι ουσιώδης για την ερμηνεία της πρακτικής επίλυσης του προβλήματος. Ενώ για μικρές ή μέτριες τιμές των παραμέτρων είναι εφικτή η ακριβής επίλυση, για μεγαλύτερα στιγμιότυπα το υπολογιστικό κόστος αυξάνεται ταχύτατα. Για τον λόγο αυτό, το 0–1 πρόβλημα του σακιδίου έχει καθιερωθεί ως πρότυπο παράδειγμα NP-hard προβλήματος, στο οποίο η χρήση ευρετικών, προσεγγιστικών και υβριδικών μεθόδων αποτελεί πρακτική αναγκαιότητα (Martello and Toth, 1990).

Κεφάλαιο 3ο: Κλασικές Μέθοδοι Επίλυσης

3.1 Γραμμικός και ακέραιος γραμμικός προγραμματισμός (LP / MILP)

Ο γραμμικός προγραμματισμός (Linear Programming, LP) και ο ακέραιος γραμμικός προγραμματισμός (Mixed Integer Linear Programming, MILP) αποτελούν θεμελιώδεις ακριβείς μεθόδους για την επίλυση προβλημάτων βελτιστοποίησης με γραμμική αντικειμενική συνάρτηση και γραμμικούς περιορισμούς. Στο πλαίσιο του προβλήματος του σακιδίου, οι μέθοδοι αυτές παρέχουν ένα αυστηρό μαθηματικό υπόβαθρο, επιτρέποντας τόσο τη θεωρητική ανάλυση όσο και την πρακτική επίλυση μικρών και μεσαίων στιγμιότυπων του προβλήματος (Papadimitriou and Steiglitz, 1998).

Στην περίπτωση του 0–1 knapsack, η τυπική διατύπωση ως ακέραιο γραμμικό πρόγραμμα περιλαμβάνει δυαδικές μεταβλητές απόφασης και έναν περιορισμό χωρητικότητας. Η παρουσία περιορισμών ακεραιότητας διαφοροποιεί ουσιωδώς το πρόβλημα από τον καθαρό γραμμικό προγραμματισμό, καθώς η εφικτή περιοχή λύσεων δεν είναι πλέον κυρτό πολύεδρο αλλά διακριτό σύνολο σημείων. Η διαφορά αυτή έχει καθοριστικές συνέπειες για την υπολογιστική δυσκολία, καθώς η αφαίρεση των περιορισμών ακεραιότητας οδηγεί στο γραμμικό χαλαρωμένο πρόβλημα (LP relaxation), το οποίο μπορεί να επιλυθεί αποδοτικά, αλλά γενικά παράγει κλασματικές λύσεις που δεν είναι αποδεκτές για το αρχικό 0–1 πρόβλημα (Korte and Vygen, 2006).

Η γραμμική χαλάρωση του προβλήματος του σακιδίου έχει ιδιαίτερη θεωρητική σημασία. Αφενός, παρέχει άνω φράγματα για την τιμή της βέλτιστης ακέραιας λύσης, τα οποία αξιοποιούνται σε ακριβείς αλγόριθμους όπως το branch-and-bound. Αφετέρου, αναδεικνύει τον ρόλο του περιορισμού ακεραιότητας ως βασικής πηγής υπολογιστικής δυσκολίας. Χαρακτηριστικά, το κλασματικό πρόβλημα του σακιδίου επιλύεται σε πολυωνυμικό χρόνο μέσω άπληστου αλγορίθμου, ενώ η ακέραια εκδοχή του παραμένει NP-hard (Martello and Toth, 1990).

Ο ακέραιος γραμμικός προγραμματισμός επιτρέπει την ακριβή επίλυση του 0–1 knapsack μέσω γενικών επιλυτών, οι οποίοι συνδυάζουν τεχνικές γραμμικού προγραμματισμού με στρατηγικές αναζήτησης στον διακριτό χώρο λύσεων. Οι σύγχρονοι MILP solvers αξιοποιούν μηχανισμούς όπως η γραμμική χαλάρωση, τα κοπτικά επίπεδα και το branch-and-bound για να εξερευνήσουν συστηματικά τον χώρο λύσεων και να αποδείξουν τη βελτιστότητα της τελικής λύσης (Papadimitriou and Steiglitz, 1998). Παρά την αποδοτικότητα αυτών των εργαλείων σε μικρά και μεσαία προβλήματα, ο υπολογιστικός χρόνος αυξάνεται ταχύτατα καθώς το μέγεθος του προβλήματος μεγαλώνει, γεγονός που περιορίζει την πρακτική τους εφαρμογή σε μεγάλα στιγμιότυπα.

Στο πλαίσιο της παρούσας εργασίας, ο ακέραιος γραμμικός προγραμματισμός δεν αντιμετωπίζεται ως ανταγωνιστική μέθοδος έναντι των ευρετικών προσεγγίσεων, αλλά ως σημείο αναφοράς. Η λύση που προκύπτει από την επίλυση του προβλήματος μέσω MILP θεωρείται βέλτιστη και χρησιμοποιείται για την ποσοτική αξιολόγηση της ποιότητας των λύσεων που παράγονται από τον υβριδικό αλγόριθμο. Με τον τρόπο αυτό, οι μέθοδοι LP και MILP λειτουργούν ως εργαλείο επαλήθευσης και σύγκρισης, επιτρέποντας την αντικειμενική εκτίμηση της απόκλισης των ευρετικών λύσεων από το θεωρητικά βέλτιστο αποτέλεσμα (Martello and Toth, 1990).

3.2 Ο αλγόριθμος Simplex

Ο αλγόριθμος Simplex αποτελεί μία από τις κλασικές και πλέον διαδεδομένες μεθόδους επίλυσης προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού. Εισήχθη αρχικά από τον Dantzig και βασίζεται στη γεωμετρική ερμηνεία των γραμμικών προβλημάτων, σύμφωνα με την οποία η βέλτιστη λύση, εφόσον

υπάρχει, βρίσκεται σε μία ακραία κορυφή (vertex) του κυρτού πολυέδρου που ορίζεται από τους γραμμικούς περιορισμούς (Papadimitriou and Steiglitz, 1998).

Θεωρητικά, ο Simplex λειτουργεί μεταβαίνοντας διαδοχικά από μία βασική εφικτή λύση σε μία γειτονική, βελτιώνοντας σε κάθε βήμα την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης. Η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται έως ότου δεν είναι δυνατή περαιτέρω βελτίωση, οπότε η τρέχουσα λύση είναι βέλτιστη. Η μέθοδος εκμεταλλεύεται τη δομή του γραμμικού προβλήματος και αποφεύγει την εξαντλητική εξέταση όλων των κορυφών του πολυέδρου, οι οποίες αυξάνονται εκθετικά με τον αριθμό των μεταβλητών (Korte and Vygen, 2006).

Από θεωρητική άποψη, ο Simplex παρουσιάζει ένα σημαντικό μειονέκτημα: η πολυπλοκότητά του στη χειρότερη περίπτωση είναι εκθετική. Έχουν κατασκευαστεί τεχνητά παραδείγματα γραμμικών προβλημάτων στα οποία ο αλγόριθμος απαιτεί εκθετικό αριθμό βημάτων για να συγκλίνει στη βέλτιστη λύση (Papadimitriou and Steiglitz, 1998; Cormen et al., 2022). Ως αποτέλεσμα, ο Simplex δεν θεωρείται πολυωνυμικός αλγόριθμος με αυστηρά θεωρητικούς όρους.

Παρά το παραπάνω θεωρητικό όριο, ο Simplex εμφανίζει εξαιρετική πρακτική απόδοση σε ένα ευρύ φάσμα προβλημάτων. Στην πράξη, συγκλίνει συνήθως σε πολύ μικρό αριθμό επαναλήψεων, γεγονός που εξηγεί τη συνεχιζόμενη χρήση του ως βασικού υποσυστήματος στους περισσότερους σύγχρονους επίλυτες γραμμικού και ακέραιου γραμμικού προγραμματισμού (Korte and Vygen, 2006). Στο πλαίσιο του προβλήματος του σακιδίου, ο Simplex δεν εφαρμόζεται άμεσα για την επίλυση της ακέραιας εκδοχής του προβλήματος, καθώς η παρουσία δυαδικών μεταβλητών παραβιάζει τις βασικές προϋποθέσεις του γραμμικού προγραμματισμού. Ωστόσο, ο ρόλος του είναι έμμεσος αλλά ουσιώδης. Η επίλυση της γραμμικής χαλάρωσης του 0–1 knapsack μέσω Simplex παρέχει άνω φράγματα για τη βέλτιστη ακέραια λύση και λειτουργεί ως θεμέλιο για ακριβείς μεθόδους όπως το branch-and-bound και οι σύγχρονοι MILP solvers (Martello and Toth, 1990).

3.3 Μέθοδοι Branch-and-Bound

Η μέθοδος branch-and-bound αποτελεί μία από τις πλέον διαδεδομένες ακριβείς τεχνικές για την επίλυση προβλημάτων ακέραιου γραμμικού προγραμματισμού και έχει εφαρμοστεί εκτενώς στο 0–1 πρόβλημα του σακιδίου. Η βασική της ιδέα συνίσταται στη συστηματική διερεύνηση του χώρου λύσεων μέσω διακλάδωσης (branching) και στον αποκλεισμό περιοχών του χώρου αναζήτησης μέσω υπολογισμού άνω και κάτω φραγμάτων (bounding) (Martello and Toth, 1990).

Στην περίπτωση του προβλήματος του σακιδίου, η διακλάδωση πραγματοποιείται συνήθως με βάση τις δυαδικές μεταβλητές απόφασης, δημιουργώντας υποπροβλήματα στα οποία επιβάλλεται η επιλογή ή η απόρριψη συγκεκριμένων αντικειμένων. Για κάθε υποπρόβλημα υπολογίζεται ένα άνω φράγμα της αντικειμενικής συνάρτησης, το οποίο συχνά προκύπτει από τη λύση της γραμμικής χαλάρωσης του προβλήματος. Αν το άνω φράγμα ενός υποπροβλήματος δεν υπερβαίνει την καλύτερη γνωστή ακέραια λύση, το αντίστοιχο τμήμα του χώρου αναζήτησης απορρίπτεται χωρίς περαιτέρω εξέταση (Papadimitriou and Steiglitz, 1998).

Η αποτελεσματικότητα της μεθόδου branch-and-bound εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από την ποιότητα των φραγμάτων και από τη στρατηγική διακλάδωσης. Στο 0–1 knapsack, έχουν αναπτυχθεί εξειδικευμένες παραλλαγές της μεθόδου που εκμεταλλεύονται τη δομή του προβλήματος και τη γραμμική χαλάρωσή του, επιτυγχάνοντας σημαντική μείωση του εξεταζόμενου χώρου λύσεων σε σύγκριση με την εξαντλητική αναζήτηση (Martello and Toth, 1990).

3.4 Συγκριτική ανάλυση πλεονεκτημάτων και περιορισμών

Οι κλασικές ακριβείς μέθοδοι επίλυσης, όπως ο γραμμικός και ακέραιος γραμμικός προγραμματισμός και η μέθοδος branch-and-bound, παρουσιάζουν σαφή πλεονεκτήματα σε επίπεδο θεωρητικής εγγύησης. Το κυριότερο πλεονέκτημά τους είναι η δυνατότητα εύρεσης και πιστοποίησης της βέλτιστης λύσης. Η ύπαρξη αποδείξεων βελτιστότητας και αυστηρών άνω και κάτω φραγμάτων επιτρέπει την αντικειμενική αξιολόγηση των αποτελεσμάτων και καθιστά τις μεθόδους αυτές ιδιαίτερα κατάλληλες ως σημεία αναφοράς για τη σύγκριση άλλων προσεγγίσεων (Garey and Johnson, 2003).

Ωστόσο, τα πλεονεκτήματα αυτά συνοδεύονται από ουσιώδεις περιορισμούς. Η υπολογιστική απαίτηση των ακριβών μεθόδων αυξάνεται ταχύτατα με το μέγεθος του προβλήματος, λόγω της εκθετικής αύξησης του χώρου λύσεων. Παρότι τεχνικές όπως το branch-and-bound μπορούν να περιορίσουν δραστικά τον αριθμό των εξεταζόμενων λύσεων σε ευνοϊκές περιπτώσεις, στη χειρότερη περίπτωση η πολυπλοκότητα παραμένει εκθετική (Papadimitriou and Steiglitz, 1998). Ως αποτέλεσμα, η εφαρμογή τους σε μεγάλα στιγμιότυπα του προβλήματος του σακιδίου μπορεί να καταστεί πρακτικά μη εφικτή.

Κεφάλαιο 4ο: Εξελικτικοί Αλγόριθμοι & Γενετικοί Αλγόριθμοι

4.1 Βασικές έννοιες εξελικτικών και γενετικών αλγορίθμων

Οι εξελικτικοί αλγόριθμοι (Evolutionary Algorithms, EA) αποτελούν μία κατηγορία στοχαστικών μεθόδων βελτιστοποίησης που αντλούν τη βασική τους έμπνευση από τις αρχές της φυσικής εξέλιξης και της φυσικής επιλογής. Η κεντρική ιδέα των EA είναι η ταυτόχρονη επεξεργασία ενός πληθυσμού υποψήφιας λύσεων, ο οποίος εξελίσσεται διαχρονικά μέσω επαναλαμβανόμενων κύκλων επιλογής και μεταβολής, με στόχο τη σταδιακή βελτίωση της ποιότητας των λύσεων ως προς μία δεδομένη αντικειμενική συνάρτηση (Eiben and Smith, 2016).

Σε έναν γενικό εξελικτικό αλγόριθμο, κάθε υποψήφια λύση αναπαρίσταται ως άτομο, ενώ ολόκληρο το σύνολο των λύσεων που εξετάζονται σε μία δεδομένη χρονική στιγμή συγκροτεί τον πληθυσμό. Η καταλληλότητα κάθε ατόμου αποτιμάται μέσω μιας συνάρτησης αξιολόγησης (fitness function), η οποία ποσοτικοποιεί την ποιότητα της λύσης. Με βάση αυτήν την αξιολόγηση, εφαρμόζονται μηχανισμοί επιλογής που ευνοούν, με στοχαστικό τρόπο, τις λύσεις υψηλότερης καταλληλότητας, διασφαλίζοντας ότι η πληροφορία των καλύτερων λύσεων έχει αυξημένη πιθανότητα να μεταδοθεί στις επόμενες γενιές (Mitchell, 1998).

Οι γενετικοί αλγόριθμοι (Genetic Algorithms, GA) αποτελούν την πιο διαδεδομένη και ιστορικά καθιερωμένη υποκατηγορία των εξελικτικών αλγορίθμων. Η αρχική τους διατύπωση αποδίδεται στον Holland, ο οποίος εισήγαγε ένα αφηρημένο υπολογιστικό μοντέλο εξέλιξης βασισμένο σε δυαδικές αναπαραστάσεις, τελεστές ανασυνδυασμού και μετάλλαξης, καθώς και σε μηχανισμούς επιλογής που μιμούνται τη φυσική επιλογή (Goldberg, 1989).

Η διαδικασία λειτουργίας ενός γενετικού αλγορίθμου περιλαμβάνει την επαναληπτική εφαρμογή τριών βασικών σταδίων: επιλογή γονέων, ανασυνδυασμό (crossover) και μετάλλαξη (mutation). Ο ανασυνδυασμός επιτρέπει τον συνδυασμό τμημάτων διαφορετικών λύσεων, προάγοντας την εξερεύνηση νέων περιοχών του χώρου λύσεων, ενώ η μετάλλαξη εισάγει τυχαίες τοπικές μεταβολές, συμβάλλοντας στη διατήρηση της ποικιλομορφίας του πληθυσμού και στην αποφυγή πρόωρης σύγκλισης (Mitchell, 1998).

Σε αντίθεση με τις ακριβείς μεθόδους βελτιστοποίησης, οι εξελικτικοί αλγόριθμοι δεν εγγυώνται την εύρεση της βέλτιστης λύσης ούτε παρέχουν αποδείξεις βελτιστότητας. Αντιθέτως, εντάσσονται στην ευρύτερη κατηγορία των μεταερευνητικών μεθόδων, οι οποίες στοχεύουν στην παραγωγή λύσεων υψηλής ποιότητας σε αποδεκτό υπολογιστικό χρόνο, ιδίως σε προβλήματα μεγάλης κλίμακας ή αυξημένης υπολογιστικής δυσκολίας (Blum and Roli, 2001).

4.2 Δυαδική αναπαράσταση λύσεων

Η δυαδική αναπαράσταση (binary encoding) αποτελεί την κλασική και πιο διαδεδομένη μέθοδο κωδικοποίησης λύσεων στους γενετικούς αλγορίθμους, ιδίως σε προβλήματα συνδυαστικής βελτιστοποίησης με διακριτές αποφάσεις. Στη μορφή αυτή, κάθε υποψήφια λύση αναπαρίσταται ως μία δυαδική συμβολοσειρά (bit string), όπου κάθε θέση της ακολουθίας αντιστοιχεί σε μία μεταβλητή απόφασης και λαμβάνει την τιμή 0 ή 1 (Goldberg, 1989).

Στο πλαίσιο του 0–1 προβλήματος του σακιδίου, η δυαδική αναπαράσταση προκύπτει με φυσικό και άμεσο τρόπο. Για ένα σύνολο παντικειμένων, το χρωμόσωμα έχει μήκος n , και κάθε δυαδικό γονίδιο $x_i \in \{0,1\}$ δηλώνει αν το αντίστοιχο αντικείμενο επιλέγεται ή απορρίπτεται. Η αντιστοίχιση αυτή δημιουργεί μια μονοσήμαντη σχέση μεταξύ χρωμοσωμάτων και εφικτών ή μη εφικτών λύσεων του

προβλήματος, γεγονός που απλοποιεί σημαντικά την υλοποίηση και την ερμηνεία των γενετικών τελεστών (Mitchell, 1998).

Ένα βασικό πλεονέκτημα της δυαδικής αναπαράστασης είναι η απλότητά της. Οι τελεστές επιλογής, ανασυνδυασμού και μετάλλαξης μπορούν να εφαρμοστούν άμεσα σε επίπεδο bit, χωρίς την ανάγκη πολύπλοκων μηχανισμών αποκωδικοποίησης. Επιπλέον, η δυαδική αναπαράσταση είναι ανεξάρτητη από τη φύση της αντικειμενικής συνάρτησης και επιτρέπει την εύκολη γενίκευση του αλγορίθμου σε διαφορετικά προβλήματα με παρόμοια δομή (Eiben and Smith, 2016).

Ωστόσο, η δυαδική αναπαράσταση συνοδεύεται και από συγκεκριμένους περιορισμούς. Στο πρόβλημα του σακιδίου, η απλή δυαδική κωδικοποίηση δεν εγγυάται ότι κάθε χρωμόσωμα αντιστοιχεί σε εφικτή λύση, καθώς ο περιορισμός χωρητικότητας μπορεί να παραβιάζεται. Ως αποτέλεσμα, απαιτούνται πρόσθετοι μηχανισμοί διαχείρισης εφικτότητας, όπως συναρτήσεις ποινής, διαδικασίες επιδιόρθωσης ή ειδικά σχεδιασμένοι τελεστές, ώστε να αποφεύγεται η συστηματική παραγωγή μη αποδεκτών λύσεων (Goldberg, 1989).

Παρά τους περιορισμούς αυτούς, η δυαδική αναπαράσταση παραμένει ιδιαίτερα ελκυστική για γενετικούς αλγορίθμους που εφαρμόζονται σε συνδυαστικά προβλήματα. Η σαφής αντιστοίχιση μεταξύ γονιδίων και μεταβλητών απόφασης διευκολύνει την ανάλυση της συμπεριφοράς του αλγορίθμου και επιτρέπει την άμεση ενσωμάτωση domain-specific γνώσης. Για τον λόγο αυτό, η binary encoding έχει καθιερωθεί ως προεπιλεγμένη επιλογή σε πλήθος εφαρμογών γενετικών αλγορίθμων στο πρόβλημα του σακιδίου και συναφή προβλήματα συνδυαστικής βελτιστοποίησης (Blum and Roli, 2001).

Στην παρούσα εργασία, η δυαδική αναπαράσταση υιοθετείται ως το βασικό σχήμα κωδικοποίησης των λύσεων, καθώς αντανakλά άμεσα τη φύση του 0–1 knapsack και επιτρέπει την καθαρή μελέτη της επίδρασης των εξελικτικών τελεστών και της υβριδικής αρχικοποίησης μέσω νευρωνικού δικτύου.

4.3 Τελεστές επιλογής, ανασυνδυασμού και μετάλλαξης

Οι γενετικοί αλγόριθμοι βασίζονται στη συνδυασμένη λειτουργία τριών βασικών εξελικτικών τελεστών: επιλογής (selection), ανασυνδυασμού (crossover) και μετάλλαξης (mutation). Οι τελεστές αυτοί καθορίζουν τη δυναμική εξέλιξης του πληθυσμού και επηρεάζουν άμεσα τη σύγκλιση και την ποιότητα των παραγόμενων λύσεων (Goldberg, 1989; Mitchell, 1998).

Η επιλογή έχει ως στόχο την προνομιακή αναπαραγωγή λύσεων με υψηλότερη καταλληλότητα. Τυπικές στρατηγικές επιλογής, όπως η επιλογή ρουλέτας (fitness-proportionate selection) ή η επιλογή μέσω τουρνουά, αυξάνουν την πιθανότητα επιλογής καλύτερων ατόμων, χωρίς να αποκλείουν πλήρως τις χαμηλότερης ποιότητας λύσεις. Η στοχαστική αυτή διαδικασία επιτρέπει τη σταδιακή βελτίωση του πληθυσμού, διατηρώντας παράλληλα επαρκή ποικιλομορφία ώστε να αποφεύγεται η πρόωρη σύγκλιση σε τοπικά άριστα (Eiben and Smith, 2016).

Ο ανασυνδυασμός (crossover) αποτελεί τον κύριο μηχανισμό δημιουργίας νέων λύσεων μέσω του συνδυασμού γενετικού υλικού από δύο γονείς. Στη δυαδική αναπαράσταση, ο ανασυνδυασμός υλοποιείται συνήθως με απλούς τελεστές, όπως ο μονοσημειακός ή πολυσημειακός crossover, οι οποίοι ανταλλάσσουν τμήματα των χρωμοσωμάτων. Με τον τρόπο αυτό, ευνοείται η επαναχρησιμοποίηση επιτυχημένων δομικών μοτίβων λύσεων, τα οποία έχουν ήδη αποδειχθεί αποδοτικά, και η δημιουργία νέων συνδυασμών που δεν έχουν εξερευνηθεί προηγουμένως (Goldberg, 1989).

Η μετάλλαξη (mutation) εισάγει τυχαίες, συνήθως μικρής κλίμακας, τροποποιήσεις στα γονίδια ενός χρωμοσώματος, όπως η αντιστροφή της τιμής ενός bit από 0 σε 1 ή αντίστροφα. Ο ρόλος της μετάλλαξης δεν είναι η άμεση βελτίωση της λύσης, αλλά η διατήρηση της γενετικής ποικιλομορφίας

του πληθυσμού και η δυνατότητα εξερεύνησης νέων περιοχών του χώρου λύσεων. Χωρίς τον τελεστή αυτόν, ο πληθυσμός τείνει να ομογενοποιείται γρήγορα, περιορίζοντας την ικανότητα του αλγορίθμου να διαφεύγει από τοπικά άριστα (Mitchell, 1998).

4.4 Καταλληλότητα των γενετικών αλγορίθμων για το πρόβλημα του σακιδίου

Οι γενετικοί αλγόριθμοι θεωρούνται ιδιαίτερα κατάλληλοι για το 0–1 πρόβλημα του σακιδίου λόγω της δομικής συμβατότητας μεταξύ του προβλήματος και της εξελικτικής αναζήτησης. Καταρχάς, η δυαδική φύση του knapsack ευθυγραμμίζεται άμεσα με τη δυαδική αναπαράσταση των χρωμοσωμάτων, επιτρέποντας την απλή και άμεση αντιστοίχιση γονιδίων και μεταβλητών απόφασης χωρίς ανάγκη πολύπλοκης κωδικοποίησης ή αποκωδικοποίησης (Goldberg, 1989).

Επιπλέον, το πρόβλημα του σακιδίου χαρακτηρίζεται από εκθετικά αυξανόμενο χώρο λύσεων και έντονη συνδυαστική πολυπλοκότητα. Σε τέτοια προβλήματα, οι ακριβείς μέθοδοι εμφανίζουν περιορισμένη κλιμακωσιμότητα, ενώ οι γενετικοί αλγόριθμοι μπορούν να εξερευνήσουν αποτελεσματικά μεγάλες περιοχές του χώρου λύσεων μέσω παράλληλης αναζήτησης σε πληθυσμιακό επίπεδο. Η παράλληλη αυτή διερεύνηση αυξάνει την πιθανότητα εντοπισμού λύσεων υψηλής ποιότητας, ακόμη και όταν ο χώρος λύσεων περιλαμβάνει πλήθος τοπικών ακροτάτων (Eiben and Smith, 2016).

Ένα ακόμη πλεονέκτημα των GA στο knapsack είναι η ευελιξία στη διαχείριση περιορισμών. Παρότι η δυαδική αναπαράσταση δεν εγγυάται την εφικτότητα όλων των λύσεων ως προς τον περιορισμό χωρητικότητας, μπορούν να ενσωματωθούν μηχανισμοί ποινής ή επιδιόρθωσης, καθώς και κατάλληλες συναρτήσεις καταλληλότητας, χωρίς να απαιτείται αναδιατύπωση του αλγορίθμου. Η δυνατότητα αυτή επιτρέπει την προσαρμογή του GA στις ιδιαιτερότητες του προβλήματος με σχετικά μικρό υπολογιστικό κόστος (Mitchell, 1998).

Τέλος, οι γενετικοί αλγόριθμοι είναι κατάλληλοι για υβριδικές προσεγγίσεις, καθώς μπορούν εύκολα να συνδυαστούν με άλλες τεχνικές, όπως ευρετικούς κανόνες ή μοντέλα μηχανικής μάθησης, για τη βελτίωση της αρχικοποίησης ή της καθοδήγησης της αναζήτησης. Το χαρακτηριστικό αυτό είναι ιδιαίτερα σημαντικό στο πρόβλημα του σακιδίου, όπου η ποιότητα των αρχικών λύσεων και η ισορροπία μεταξύ εξερεύνησης και εκμετάλλευσης επηρεάζουν έντονα την απόδοση του αλγορίθμου. Για τους λόγους αυτούς, οι GA έχουν καθιερωθεί ως μία από τις πλέον διαδεδομένες προσεγγιστικές μεθόδους για το 0–1 knapsack και αποτελούν φυσική επιλογή για τη μελέτη υβριδικών αλγοριθμικών σχημάτων, όπως αυτό που εξετάζεται στην παρούσα εργασία (Blum and Roli, 2001).

Κεφάλαιο 5ο: Νευρωνικά Δίκτυα για Προσεγγιστική Βελτιστοποίηση

5.1 Βασικές αρχές των νευρωνικών δικτύων

Τα τεχνητά νευρωνικά δίκτυα (Neural Networks, NN) αποτελούν υπολογιστικά μοντέλα εμπνευσμένα από τη δομή και τη λειτουργία του βιολογικού νευρικού συστήματος, με στόχο την προσεγγιστική αναπαράσταση πολύπλοκων συναρτήσεων και σχέσεων μεταξύ δεδομένων εισόδου και εξόδου. Η βασική μονάδα ενός νευρωνικού δικτύου είναι ο τεχνητός νευρώνας, ο οποίος λαμβάνει ένα σύνολο εισόδων, τις σταθμίζει μέσω αντίστοιχων βαρών, υπολογίζει το άθροισμά τους και στη συνέχεια εφαρμόζει μία μη γραμμική συνάρτηση ενεργοποίησης για την παραγωγή της εξόδου (Haykin, 2016).

Σε επίπεδο αρχιτεκτονικής, ένα νευρωνικό δίκτυο ορίζεται ως ένα κατευθυνόμενο γράφημα, στο οποίο οι κόμβοι αντιστοιχούν σε νευρώνες και οι ακμές σε σταθμισμένες συνδέσεις μεταξύ τους. Οι νευρώνες οργανώνονται συνήθως σε διακριτά επίπεδα: επίπεδο εισόδου, ένα ή περισσότερα κρυφά επίπεδα και επίπεδο εξόδου. Η ύπαρξη κρυφών επιπέδων επιτρέπει στο δίκτυο να μοντελοποιεί μη γραμμικές σχέσεις και να υπερβαίνει τους περιορισμούς απλών γραμμικών μοντέλων, όπως το μονοεπίπεδο perceptron (Bishop, 2006).

Η διαδικασία εκμάθησης ενός νευρωνικού δικτύου συνίσταται στη ρύθμιση των βαρών των συνδέσεων έτσι ώστε το δίκτυο να ελαχιστοποιεί μια συνάρτηση σφάλματος, η οποία εκφράζει την απόκλιση μεταξύ της προβλεπόμενης και της επιθυμητής εξόδου. Στην επιβλεπόμενη μάθηση, που αποτελεί την πιο συνηθισμένη περίπτωση για πολυεπίπεδα δίκτυα, η προσαρμογή των βαρών πραγματοποιείται μέσω αλγορίθμων βαθμιαίας καθόδου, με τον αλγόριθμο οπισθοδιάδοσης του σφάλματος (backpropagation) να αποτελεί τον καθιερωμένο μηχανισμό υπολογισμού των παραγώγων (Haykin, 2016; Bishop, 2006).

Από θεωρητική άποψη, τα πολυεπίπεδα νευρωνικά δίκτυα διαθέτουν σημαντική εκφραστική ικανότητα. Σύμφωνα με το θεώρημα καθολικής προσέγγισης, ένα δίκτυο με ένα τουλάχιστον κρυφό επίπεδο και κατάλληλη μη γραμμική συνάρτηση ενεργοποίησης μπορεί να προσεγγίσει αυθαίρετα καλά οποιαδήποτε συνεχή συνάρτηση σε συμπαγές σύνολο, υπό κατάλληλες συνθήκες (Bishop, 2006). Η ιδιότητα αυτή καθιστά τα νευρωνικά δίκτυα ιδιαίτερα ελκυστικά για προβλήματα όπου η ακριβής μορφή της συνάρτησης που συνδέει είσοδο και έξοδο είναι άγνωστη ή δύσκολο να προτυποποιηθεί αναλυτικά.

Παρά τα πλεονεκτήματά τους, τα νευρωνικά δίκτυα δεν σχεδιάστηκαν ως ακριβείς αλγόριθμοι βελτιστοποίησης. Η εκμάθησή τους αντιστοιχεί σε ένα μη κυρτό πρόβλημα βελτιστοποίησης, το οποίο μπορεί να παρουσιάζει πολλαπλά τοπικά ελάχιστα και εξάρτηση από την αρχικοποίηση των βαρών. Ως αποτέλεσμα, η συμπεριφορά τους χαρακτηρίζεται από στοχαστικότητα και προσεγγιστικό χαρακτήρα, στοιχεία που περιορίζουν τη χρήση τους ως αυτόνομων exact solvers σε συνδυαστικά προβλήματα (SmithMiles, 1999).

Στο πλαίσιο της προσεγγιστικής βελτιστοποίησης, τα νευρωνικά δίκτυα αντιμετωπίζονται κυρίως ως εργαλεία μάθησης και καθοδήγησης της αναζήτησης. Ιστορικά, οι πρώτες προσπάθειες εφαρμογής νευρωνικών δικτύων σε προβλήματα βελτιστοποίησης, όπως το έργο των Hopfield και Tank (1985), ανέδειξαν τόσο τις δυνατότητες όσο και τους περιορισμούς της άμεσης χρήσης τους για την επίλυση NP-hard προβλημάτων. Η μεταγενέστερη βιβλιογραφία κατέληξε στο συμπέρασμα ότι η ισχύς των νευρωνικών δικτύων αξιοποιείται αποτελεσματικότερα όταν ενσωματώνονται σε υβριδικά σχήματα, λειτουργώντας ως μηχανισμοί εκτίμησης, φιλτραρίσματος ή παραγωγής υποσχόμενων λύσεων, και όχι ως αποκλειστικοί μηχανισμοί επίλυσης (SmithMiles, 1999).

5.2 Πολυεπίπεδο Νευρωνικό Δίκτυο

Το πολυεπίπεδο perceptron (Multilayer Perceptron, MLP) αποτελεί την πλέον καθιερωμένη αρχιτεκτονική τεχνητών νευρωνικών δικτύων για επιβλεπόμενη μάθηση και προσεγγιστική μοντελοποίηση μη γραμμικών συναρτήσεων. Το MLP επεκτείνει το μονοεπίπεδο perceptron μέσω της εισαγωγής ενός ή περισσότερων κρυφών επιπέδων νευρώνων, επιτρέποντας την αναπαράσταση σύνθετων σχέσεων μεταξύ εισόδων και εξόδων που δεν μπορούν να μοντελοποιηθούν με γραμμικούς συνδυασμούς (Haykin, 2016).

Ένα τυπικό MLP αποτελείται από τρία βασικά τμήματα: το επίπεδο εισόδου, ένα ή περισσότερα κρυφά επίπεδα και το επίπεδο εξόδου. Κάθε νευρώνας σε ένα επίπεδο συνδέεται πλήρως με τους νευρώνες του επόμενου επιπέδου μέσω σταθμισμένων συνδέσεων. Η έξοδος κάθε νευρώνα προκύπτει από την εφαρμογή μίας μη γραμμικής συνάρτησης ενεργοποίησης στο σταθμισμένο άθροισμα των εισόδων του. Συνήθεις συναρτήσεις ενεργοποίησης στα κρυφά επίπεδα είναι οι sigmoid, tanh και ReLU, ενώ το επίπεδο εξόδου προσαρμόζεται στη φύση του προβλήματος, όπως δυαδική ή συνεχής πρόβλεψη (Bishop, 2006).

Η εκπαίδευση ενός MLP βασίζεται στην επιβλεπόμενη μάθηση και στη βελτιστοποίηση μιας συνάρτησης κόστους, η οποία ποσοτικοποιεί το σφάλμα μεταξύ των προβλεπόμενων εξόδων του δικτύου και των επιθυμητών τιμών. Η προσαρμογή των βαρών πραγματοποιείται μέσω του αλγορίθμου οπισθοδιάδοσης του σφάλματος (backpropagation), ο οποίος υπολογίζει τις μερικές παραγώγους της συνάρτησης κόστους ως προς τα βάρη και επιτρέπει την εφαρμογή μεθόδων βαθμιαίας καθόδου. Η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται έως ότου επιτευχθεί σύγκλιση σε ένα αποδεκτό επίπεδο σφάλματος ή ικανοποιηθεί κάποιο κριτήριο τερματισμού (Haykin, 2016).

Από θεωρητική σκοπιά, τα MLP διαθέτουν ισχυρή εκφραστική ικανότητα. Το θεώρημα καθολικής προσέγγισης καταδεικνύει ότι ένα MLP με ένα κρυφό επίπεδο και κατάλληλη μη γραμμική συνάρτηση ενεργοποίησης μπορεί να προσεγγίσει οποιαδήποτε συνεχή συνάρτηση σε συμπαγές σύνολο με αυθαίρετη ακρίβεια, εφόσον διαθέτει επαρκή αριθμό νευρώνων (Bishop, 2006). Ωστόσο, το θεώρημα αυτό δεν παρέχει εγγυήσεις σχετικά με τη διαδικασία εκπαίδευσης, τον απαιτούμενο αριθμό νευρώνων ή τη γενίκευση του μοντέλου σε άγνωστα δεδομένα.

Στο πλαίσιο προβλημάτων βελτιστοποίησης, το MLP δεν λειτουργεί ως μηχανισμός άμεσης αναζήτησης λύσεων στον διακριτό χώρο. Αντιθέτως, χρησιμοποιείται κυρίως ως προσεγγιστής συναρτήσεων, ικανός να εκτιμά σχέσεις μεταξύ χαρακτηριστικών εισόδου και ποιοτικών δεικτών λύσεων. Η ιδιότητα αυτή επιτρέπει τη χρήση του MLP ως εργαλείου καθοδήγησης ή υποστήριξης ευρετικών μεθόδων, για παράδειγμα μέσω της πρόβλεψης της καταλληλότητας υποψήφιων επιλογών ή της εκτίμησης πιθανοτήτων συμμετοχής μεταβλητών σε καλές λύσεις (SmithMiles, 1999).

Παρά τα πλεονεκτήματά του, το MLP παρουσιάζει περιορισμούς που είναι κρίσιμοι για την κατανόηση του ρόλου του στην παρούσα εργασία. Η εκπαίδευση του δικτύου αποτελεί μη κυρτό πρόβλημα βελτιστοποίησης, ευαίσθητο στην αρχικοποίηση των βαρών, στην επιλογή υπερπαραμέτρων και στη διαθεσιμότητα αντιπροσωπευτικών δεδομένων εκπαίδευσης. Επιπλέον, το MLP δεν παρέχει εγγυήσεις βελτιστότητας ούτε μηχανισμούς ελέγχου εφικτότητας σε συνδυαστικά προβλήματα με αυστηρούς περιορισμούς, όπως το 0–1 πρόβλημα του σακιδίου (SmithMiles, 1999).

Για τους λόγους αυτούς, το MLP αντιμετωπίζεται στην παρούσα εργασία ως προσεγγιστικός μηχανισμός μάθησης και όχι ως αυτόνομος αλγόριθμος επίλυσης. Η χρησιμότητά του έγκειται στην ικανότητά του να εξάγει δομική πληροφορία από δεδομένα και να την αξιοποιεί για τη βελτίωση της

αρχικοποίησης ή της καθοδήγησης ενός γενετικού αλγορίθμου, συμβάλλοντας έτσι στη συνολική απόδοση του υβριδικού σχήματος που εξετάζεται.

5.3 Ρόλος των νευρωνικών δικτύων ως ευρετικοί μηχανισμοί καθοδήγησης

Στο πλαίσιο της προσεγγιστικής βελτιστοποίησης, τα νευρωνικά δίκτυα χρησιμοποιούνται κυρίως ως μηχανισμοί υποστήριξης της αναζήτησης και όχι ως αυτόνομοι αλγόριθμοι επίλυσης. Ο ρόλος τους εστιάζει στη μάθηση δομικών προτύπων από δεδομένα και στην αξιοποίηση αυτής της γνώσης για την καθοδήγηση ευρετικών ή μεταευρετικών μεθόδων. Η χρήση αυτή αντανακλά την ικανότητα των νευρωνικών δικτύων να προσεγγίζουν πολύπλοκες συναρτήσεις και να συσχετίζουν χαρακτηριστικά εισόδου με δείκτες ποιότητας λύσεων, χωρίς να απαιτείται ρητή αναλυτική μοντελοποίηση (Haykin, 2016; Bishop, 2006).

Στα προβλήματα συνδυαστικής βελτιστοποίησης, και ειδικότερα στο 0–1 πρόβλημα του σακιδίου, τα νευρωνικά δίκτυα μπορούν να λειτουργήσουν ως heuristics ή guides με διάφορους τρόπους. Ενδεικτικά, μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την εκτίμηση της σχετικής σημασίας ή της πιθανότητας επιλογής επιμέρους μεταβλητών απόφασης, για την αξιολόγηση υποψήφιων λύσεων πριν από την πλήρη διερεύνησή τους, ή για την παραγωγή αρχικών λύσεων υψηλότερης ποιότητας σε σύγκριση με τυχαία αρχικοποίηση. Με αυτόν τον τρόπο, το νευρωνικό δίκτυο λειτουργεί ως μηχανισμός φιλτραρίσματος και κατεύθυνσης της αναζήτησης προς υποσχόμενες περιοχές του χώρου λύσεων (SmithMiles, 1999).

Η βιβλιογραφία έχει δείξει ότι η ενσωμάτωση νευρωνικών δικτύων σε ευρετικές διαδικασίες μπορεί να βελτιώσει τη σύγκλιση και να μειώσει τον απαιτούμενο υπολογιστικό χρόνο, ιδίως όταν ο χώρος λύσεων είναι μεγάλος και περιλαμβάνει πλήθος τοπικών ακροτάτων. Σε τέτοιες περιπτώσεις, το νευρωνικό δίκτυο δεν αντικαθιστά τον αλγόριθμο αναζήτησης, αλλά παρέχει συμπληρωματική πληροφορία που ενισχύει την εκμετάλλευση της ήδη αποκτημένης γνώσης, διατηρώντας παράλληλα τη δυνατότητα εξερεύνησης μέσω στοχαστικών μηχανισμών (Blum and Roli, 2001).

Η προσέγγιση αυτή είναι ιδιαίτερα συμβατή με υβριδικά σχήματα, όπου τα νευρωνικά δίκτυα συνδυάζονται με εξελικτικούς αλγορίθμους ή άλλες μεταευρετικές μεθόδους. Σε τέτοια σχήματα, το νευρωνικό δίκτυο αναλαμβάνει ρόλο καθοδήγησης, για παράδειγμα μέσω της αρχικοποίησης μέρους του πληθυσμού ή της προσαρμογής παραμέτρων της αναζήτησης, ενώ η τελική εξερεύνηση και βελτίωση των λύσεων πραγματοποιείται από τον ευρετικό αλγόριθμο. Η διάκριση αυτή επιτρέπει την αξιοποίηση των πλεονεκτημάτων και των δύο προσεγγίσεων χωρίς την επιβάρυνση των αντίστοιχων περιορισμών τους (SmithMiles, 1999).

5.4 Περιορισμοί των νευρωνικών δικτύων ως ακριβείς επιλύτες

Παρά την εκφραστική τους ισχύ, τα νευρωνικά δίκτυα δεν είναι κατάλληλα για χρήση ως ακριβείς αλγόριθμοι επίλυσης σε συνδυαστικά προβλήματα βελτιστοποίησης. Ένας βασικός λόγος είναι ότι η εκπαίδευσή τους συνιστά ένα μη κυρτό πρόβλημα βελτιστοποίησης, το οποίο επιλύεται με στοχαστικές μεθόδους και δεν παρέχει εγγυήσεις σύγκλισης στη βέλτιστη λύση. Ως αποτέλεσμα, η συμπεριφορά ενός νευρωνικού δικτύου εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από την αρχικοποίηση των βαρών, την επιλογή υπερπαραμέτρων και τη διαθεσιμότητα αντιπροσωπευτικών δεδομένων εκπαίδευσης (Bishop, 2006).

Επιπλέον, τα νευρωνικά δίκτυα δεν ενσωματώνουν εγγενείς μηχανισμούς για τη διαχείριση αυστηρών περιορισμών, όπως οι περιορισμοί χωρητικότητας στο 0–1 πρόβλημα του σακιδίου. Η εξασφάλιση εφικτότητας των λύσεων απαιτεί πρόσθετες διαδικασίες ή εξωτερικούς μηχανισμούς ελέγχου, γεγονός που αναιρεί τον ρόλο του δικτύου ως αυτόνομου επιλυτή. Αντίθετα, οι ακριβείς μέθοδοι βελτιστοποίησης βασίζονται σε σαφώς ορισμένες μαθηματικές διατυπώσεις και παρέχουν αποδείξεις

βελτιστότητας και εφικτότητας, στοιχεία που δεν μπορούν να προσφερθούν από ένα καθαρά μαθησιακό μοντέλο (Garey and Johnson, 2003).

Η ιστορική εμπειρία από πρώιμες προσεγγίσεις, όπως τα νευρωνικά δίκτυα τύπου Hopfield για προβλήματα βελτιστοποίησης, ανέδειξε ότι, παρότι είναι δυνατή η διατύπωση ενεργειακών συναρτήσεων που αντιστοιχούν σε αντικειμενικές συναρτήσεις, η σύγκλιση σε παγκόσμια βέλτιστες λύσεις δεν είναι εγγυημένη και συχνά εξαρτάται από ευνοϊκές συνθήκες ή μικρά μεγέθη προβλήματος (Hopfield and Tank, 1985). Η παρατήρηση αυτή οδήγησε στη σταδιακή εγκατάλειψη της χρήσης των νευρωνικών δικτύων ως αυτόνομων exact solvers για NP-hard προβλήματα.

Κεφάλαιο 6ο: Υβριδικές Προσεγγίσεις Νευρωνικών Δικτύων και Εξελικτικών Αλγορίθμων στο Πρόβλημα του Σακιδίου

6.1 Υβριδικές Μέθοδοι Νευρωνικών Δικτύων και Εξελικτικών Αλγορίθμων

Η αυξανόμενη πολυπλοκότητα των σύγχρονων προβλημάτων συνδυαστικής βελτιστοποίησης έχει καταστήσει σαφές ότι καμία μεμονωμένη κατηγορία μεθόδων δεν είναι επαρκής για την αποδοτική και αξιόπιστη επίλυσή τους σε όλες τις κλίμακες. Στην περίπτωση του προβλήματος του σακιδίου, η εκθετική αύξηση του χώρου λύσεων με το πλήθος των αντικειμένων καθιστά τις ακριβείς μεθόδους υπολογιστικά ασύμφορες για μεγάλα στιγμιότυπα, ενώ οι καθαρά ευρετικές ή μεταευρετικές προσεγγίσεις, αν και αποδοτικές, στερούνται εγγυήσεων ποιότητας και συχνά παρουσιάζουν ευαισθησία στις παραμέτρους τους (Martello and Toth, 1990; Feng et al., 2026).

Στο πλαίσιο αυτό, έχει αναδειχθεί τα τελευταία χρόνια η ανάγκη για υβριδικές προσεγγίσεις, οι οποίες συνδυάζουν διαφορετικά υπολογιστικά παραδείγματα με στόχο την αξιοποίηση των συμπληρωματικών τους πλεονεκτημάτων. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει ο συνδυασμός νευρωνικών δικτύων με εξελικτικούς αλγορίθμους, όπου η μηχανική μάθηση δεν επιχειρεί να αντικαταστήσει τη διαδικασία βελτιστοποίησης, αλλά να την ενισχύσει μέσω της παροχής δομικής πληροφορίας που προκύπτει από δεδομένα (Talbi, 2021; Karimi-Mamaghan et al., 2022).

Οι εξελικτικοί αλγόριθμοι προσφέρουν ισχυρούς μηχανισμούς εξερεύνησης μεγάλων και μη κυρτών χώρων λύσεων, βασιζόμενοι σε πληθυσμιακή αναζήτηση και στοχαστικούς τελεστές. Ωστόσο, η αποτελεσματικότητά τους εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από την ποιότητα της αρχικοποίησης, τη ρύθμιση των παραμέτρων και τη δομή του προβλήματος. Από την άλλη πλευρά, τα νευρωνικά δίκτυα έχουν τη δυνατότητα να μαθαίνουν πρότυπα και συσχετίσεις από δεδομένα, αποτυπώνοντας στατιστικά χαρακτηριστικά λύσεων υψηλής ποιότητας, χωρίς όμως να διαθέτουν μηχανισμούς συστηματικής αναζήτησης ή εγγυήσεις βελτιστότητας (Bello et al., 2016; Angioni et al., 2025).

Ο υβριδισμός των δύο αυτών προσεγγίσεων προκύπτει ως φυσικό επόμενο βήμα, επιτρέποντας την ενσωμάτωση γνώσης που έχει εξαχθεί μέσω μάθησης στη διαδικασία εξελικτικής αναζήτησης. Στη σχετική βιβλιογραφία έχουν προταθεί διάφορες μορφές υβριδικών σχημάτων, που κυμαίνονται από χαλαρά συνδεδεμένες αρχιτεκτονικές, όπου τα νευρωνικά δίκτυα χρησιμοποιούνται ως βοηθητικά εργαλεία, έως πιο στενά ενοποιημένες προσεγγίσεις, στις οποίες η μάθηση επηρεάζει άμεσα τη δυναμική της εξελικτικής διαδικασίας (Blum and Roli, 2001; Talbi, 2021).

Η ανάγκη για τέτοιες υβριδικές μεθόδους γίνεται ιδιαίτερα εμφανής στο πρόβλημα του σακιδίου, το οποίο παρουσιάζει αφενός σαφή δομή και επαναλαμβανόμενα χαρακτηριστικά σε λύσεις υψηλής ποιότητας, και αφετέρου σημαντική συνδυαστική πολυπλοκότητα. Πρόσφατες μελέτες έχουν δείξει ότι τα νευρωνικά μοντέλα μπορούν να μάθουν πολιτικές ή ευρετικές επιλογής αντικειμένων που λειτουργούν αποτελεσματικά σε συγκεκριμένες κατανομές στιγμιότυπων, αλλά συχνά αντιμετωπίζουν περιορισμούς γενίκευσης και κλιμάκωσης (Afshar et al., 2020; Hertrich and Skutella, 2020).

6.2 Κατηγοριοποίηση υβριδικών προσεγγίσεων Νευρωνικών Δικτύων και Εξελικτικών Αλγορίθμων

Η βιβλιογραφία των υβριδικών μεταευρετικών μεθόδων έχει αναπτύξει τα τελευταία χρόνια συστηματικές ταξινομήσεις για τον συνδυασμό μηχανικής μάθησης και εξελικτικών αλγορίθμων. Κοινός άξονας αυτών των ταξινομήσεων είναι ότι τα νευρωνικά δίκτυα δεν αντιμετωπίζονται ως ανεξάρτητοι επίλυτες, αλλά ως υποστηρικτικοί μηχανισμοί που ενσωματώνουν γνώση στη διαδικασία

αναζήτησης. Σύμφωνα με τις καθιερωμένες ταξινομίες των Talbi (2021), Blum and Roli (2001) και Karimi-Mamaghan et al. (2022), οι υβριδικές προσεγγίσεις μπορούν να ομαδοποιηθούν με βάση τον ρόλο που αναλαμβάνει το μοντέλο μάθησης.

Μία πρώτη κατηγορία περιλαμβάνει τις προσεγγίσεις όπου το νευρωνικό δίκτυο λειτουργεί ως εκτιμητής καταλληλότητας ή προσεγγιστικό μοντέλο (fitness surrogate). Σε αυτήν την περίπτωση, το NN εκπαιδεύεται ώστε να προσεγγίζει τη συνάρτηση αξιολόγησης ή τμήμα αυτής, με στόχο τη μείωση του υπολογιστικού κόστους της αξιολόγησης λύσεων. Τέτοιες προσεγγίσεις είναι ιδιαίτερα διαδεδομένες σε προβλήματα όπου η ακριβής αξιολόγηση είναι χρονοβόρα, αν και η εισαγωγή σφάλματος εκτίμησης μπορεί να επηρεάσει αρνητικά τη δυναμική της εξελικτικής διαδικασίας (Karimi-Mamaghan et al., 2022).

Μία δεύτερη, ευρέως χρησιμοποιούμενη κατηγορία αφορά τη χρήση νευρωνικών δικτύων για καθοδηγούμενη αρχικοποίηση πληθυσμού. Στα σχήματα αυτά, το NN μαθαίνει πρότυπα λύσεων υψηλής ποιότητας και χρησιμοποιείται για την παραγωγή αρχικών ατόμων που βρίσκονται σε υποπεριοχές του χώρου λύσεων με αυξημένη αναμενόμενη καταλληλότητα. Η συγκεκριμένη μορφή υβριδισμού θεωρείται χαμηλού ρίσκου, καθώς δεν επηρεάζει άμεσα τους τελεστές του εξελικτικού αλγορίθμου και διατηρεί πλήρως τον στοχαστικό χαρακτήρα της αναζήτησης (Talbi, 2021).

Μία τρίτη κατηγορία περιλαμβάνει τις προσεγγίσεις όπου τα νευρωνικά δίκτυα χρησιμοποιούνται για καθοδήγηση των εξελικτικών τελεστών, όπως η επιλογή γονέων, η μετάλλαξη ή ο ανασυνδυασμός. Σε αυτές τις περιπτώσεις, η μάθηση επηρεάζει δυναμικά τη συμπεριφορά του εξελικτικού αλγορίθμου, με στόχο τη βελτίωση της ισορροπίας μεταξύ εξερεύνησης και εκμετάλλευσης. Παρότι οι μέθοδοι αυτές μπορούν να επιτύχουν ταχύτερη σύγκλιση, συχνά εμφανίζουν αυξημένη πολυπλοκότητα και ευαισθησία στη γενίκευση (Blum and Roli, 2001; Karimi-Mamaghan et al., 2022).

Τέλος, μία πιο στενά ενοποιημένη κατηγορία αφορά τη συνεκπαίδευση νευρωνικών δικτύων και εξελικτικών αλγορίθμων, όπου οι δύο συνιστώσες εξελίσσονται ταυτόχρονα και αλληλεπιδρούν συνεχώς. Τα σχήματα αυτά θολώνουν τα όρια μεταξύ μάθησης και αναζήτησης, αλλά συνοδεύονται από αυξημένο υπολογιστικό κόστος και περιορισμένη ερμηνευσιμότητα, γεγονός που έχει περιορίσει τη χρήση τους σε εφαρμογές μεγάλης κλίμακας.

Στο πλαίσιο της παρούσας εργασίας, ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι αρχιτεκτονικές υψηλού επιπέδου, όπου η μάθηση χρησιμοποιείται ως μηχανισμός καθοδήγησης χωρίς να αλλοιώνει τη βασική δομή της εξελικτικής αναζήτησης. Οι επόμενες ενότητες εστιάζουν σε τέτοιες υβριδικές προσεγγίσεις όπως έχουν εφαρμοστεί ειδικά στο πρόβλημα του σακιδίου.

6.3 Υβριδικές μέθοδοι Νευρωνικών Δικτύων και Εξελικτικών Αλγορίθμων για το Πρόβλημα του Σακιδίου

Το πρόβλημα του σακιδίου έχει αποτελέσει σημείο αναφοράς για την ανάπτυξη και αξιολόγηση υβριδικών μεθόδων μάθησης και εξελικτικής αναζήτησης, λόγω της σαφούς δομής του και της συνδυαστικής του πολυπλοκότητας. Στη σχετική βιβλιογραφία, οι περισσότερες προσεγγίσεις δεν επιχειρούν την αντικατάσταση των κλασικών μεταερευτικών αλγορίθμων, αλλά την ενίσχυσή τους μέσω της ενσωμάτωσης γνώσης που προκύπτει από δεδομένα.

Μία από τις πιο επιδραστικές γραμμές έρευνας αφορά τις νευρωνικές προσεγγίσεις κατασκευής λύσεων μέσω ενισχυτικής μάθησης. Η εργασία των Bello et al. (2016) εισήγαγε το πλαίσιο της νευρωνικής συνδυαστικής βελτιστοποίησης, όπου ένα νευρωνικό δίκτυο εκπαιδεύεται ώστε να κατασκευάζει λύσεις ακολουθώντας μια ακολουθιακή πολιτική επιλογής. Αν και η προσέγγιση αυτή έχει εφαρμοστεί

επιτυχώς σε διάφορα προβλήματα, στο knapsack εμφανίζει περιορισμούς γενίκευσης και εξάρτηση από την κατανομή των στιγμιότυπων εκπαίδευσης.

Στην ίδια κατεύθυνση, οι Afshar et al. (2020) πρότειναν μία μέθοδο βαθιάς ενισχυτικής μάθησης για το πρόβλημα του σακιδίου, βασισμένη σε τεχνικές ομαδοποίησης καταστάσεων. Η προσέγγιση αυτή επιτυγχάνει αξιόλογες επιδόσεις για συγκεκριμένες κλάσεις στιγμιότυπων, ωστόσο η διαδικασία εκπαίδευσης είναι υπολογιστικά απαιτητική και η προσαρμογή σε διαφορετικά μεγέθη ή παραλλαγές του προβλήματος δεν είναι άμεση.

Παράλληλα, θεωρητικές μελέτες όπως αυτή των Hertrich and Skutella (2020) έχουν δείξει ότι νευρωνικά δίκτυα περιορισμένου μεγέθους μπορούν, υπό συγκεκριμένες προϋποθέσεις, να υπολογίσουν λύσεις υψηλής ποιότητας ή ακόμη και βέλτιστες για το πρόβλημα του σακιδίου. Παρότι τα αποτελέσματα αυτά είναι ιδιαίτερα σημαντικά σε θεωρητικό επίπεδο, οι προτεινόμενες αρχιτεκτονικές δεν μεταφράζονται άμεσα σε πρακτικά υβριδικά σχήματα για μεγάλα στιγμιότυπα.

Σε αντίθεση με τις καθαρά νευρωνικές προσεγγίσεις, αρκετές εργασίες υιοθετούν υβριδικά σχήματα όπου τα νευρωνικά δίκτυα λειτουργούν ως μηχανισμοί καθοδήγησης εξελικτικών ή ευρετικών αλγορίθμων. Στα σχήματα αυτά, η μάθηση χρησιμοποιείται για την εξαγωγή χαρακτηριστικών ή πιθανοτήτων επιλογής αντικειμένων, οι οποίες ενσωματώνονται στη διαδικασία αναζήτησης χωρίς να αντικαθιστούν τους στοχαστικούς μηχανισμούς του αλγορίθμου.

Σύμφωνα με την πρόσφατη ανασκόπηση των Feng et al. (2026), οι υβριδικές προσεγγίσεις για το πρόβλημα του σακιδίου τείνουν να επιτυγχάνουν καλύτερη ισορροπία μεταξύ ποιότητας λύσης και υπολογιστικού κόστους σε σύγκριση με καθαρά νευρωνικές μεθόδους, ιδιαίτερα σε μεγάλες κλίμακες. Ωστόσο, κοινό χαρακτηριστικό των περισσότερων μελετών είναι η απουσία εγγυήσεων γενίκευσης και η εξάρτηση από τη δομή των δεδομένων εκπαίδευσης.

6.4 Σύγκριση και περιορισμοί των υβριδικών μεθόδων

Η συγκριτική ανάλυση των υβριδικών προσεγγίσεων που συνδυάζουν νευρωνικά δίκτυα και εξελικτικούς αλγορίθμους για το πρόβλημα του σακιδίου αναδεικνύει επαναλαμβανόμενα χαρακτηριστικά, καθώς και κοινά σημεία περιορισμού. Η πλειονότητα των μεθόδων αυτών υιοθετεί τη μηχανική μάθηση ως μέσο ενσωμάτωσης εμπειρικής πληροφορίας στη διαδικασία αναζήτησης, χωρίς να επιχειρεί την πλήρη αντικατάσταση των μεταερευνητικών μηχανισμών (Blum and Roli, 2001; Talbi, 2021).

Ένα βασικό πλεονέκτημα που αναφέρεται συστηματικά στη βιβλιογραφία είναι η βελτίωση της ποιότητας των λύσεων στα αρχικά στάδια της αναζήτησης. Η χρήση μάθησης επιτρέπει την αξιοποίηση στατιστικών μοτίβων που εμφανίζονται σε λύσεις υψηλής ποιότητας, οδηγώντας σε πιο ενημερωμένη εξερεύνηση του χώρου λύσεων σε σύγκριση με πλήρως τυχαίες προσεγγίσεις (Karimi-Mamaghan et al., 2022). Ωστόσο, η αποτελεσματικότητα αυτής της στρατηγικής εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από την κατανομή των δεδομένων εκπαίδευσης και από τη συμβατότητα των στιγμιότυπων εφαρμογής, γεγονός που περιορίζει τη γενικευσιμότητα των αποτελεσμάτων.

Σημαντικός περιορισμός των υβριδικών μεθόδων αφορά το υπολογιστικό κόστος. Ιδιαίτερα στις προσεγγίσεις που βασίζονται σε βαθιά νευρωνικά δίκτυα ή σε ενισχυτική μάθηση, η φάση εκπαίδευσης μπορεί να είναι ιδιαίτερα απαιτητική, συχνά υπερβαίνοντας το κόστος της ίδιας της διαδικασίας βελτιστοποίησης (Bello et al., 2016; Afshar et al., 2020; Angioni et al., 2025). Επιπλέον, η ανάγκη επανεκπαίδευσης για διαφορετικά μεγέθη ή παραλλαγές του προβλήματος παραμένει ανοικτό ζήτημα.

Ένας ακόμη κοινός περιορισμός είναι η απουσία θεωρητικών εγγυήσεων. Παρότι υπάρχουν μεμονωμένες θεωρητικές μελέτες που εξετάζουν την εκφραστική ικανότητα νευρωνικών μοντέλων για το πρόβλημα του σακιδίου, οι περισσότερες υβριδικές προσεγγίσεις αξιολογούνται αποκλειστικά εμπειρικά και σε περιορισμένες κλάσεις στιγμιότυπων (Hertrich and Skutella, 2020; Feng et al., 2026). Η παρατήρηση αυτή είναι σύμφωνη με ευρύτερα συμπεράσματα της βιβλιογραφίας των μεταερευτικών, σύμφωνα με τα οποία η βελτίωση της μέσης απόδοσης συχνά συνοδεύεται από αυξημένη ευαισθησία σε σχεδιαστικές επιλογές και παραμέτρους (Talbi, 2021).

6.5 Θέση της προτεινόμενης μεθόδου στη βιβλιογραφία

Με βάση τις ταξινομήσεις και τις συγκριτικές αναλύσεις που παρουσιάζονται στη σύγχρονη βιβλιογραφία, η παρούσα εργασία εντάσσεται στην κατηγορία των υβριδικών προσεγγίσεων υψηλού επιπέδου, όπου τα νευρωνικά δίκτυα χρησιμοποιούνται ως μηχανισμοί καθοδήγησης της εξελικτικής αναζήτησης και όχι ως αυτόνομοι επιλύτες (Blum and Roli, 2001; Talbi, 2021).

Σε αντίθεση με προσεγγίσεις που βασίζονται αποκλειστικά σε ενισχυτική μάθηση ή σε νευρωνικά μοντέλα κατασκευής λύσεων, η προτεινόμενη μεθοδολογία υιοθετεί έναν σαφή διαχωρισμό ρόλων μεταξύ μάθησης και αναζήτησης. Το νευρωνικό δίκτυο αξιοποιείται για την εξαγωγή πληροφορίας σχετικής με την επιλογή αντικειμένων, η οποία ενσωματώνεται στη φάση αρχικοποίησης του γενετικού αλγορίθμου. Η επιλογή αυτή ευθυγραμμίζεται με τη βιβλιογραφία που προκρίνει τον χαλαρό υβριδισμό ως σταθερή και ερμηνεύσιμη μορφή συνδυασμού μηχανικής μάθησης και μεταερευτικών μεθόδων (Karimi-Mamaghan et al., 2022; Feng et al., 2026).

Κεφάλαιο 7ο: Υβριδική Μέθοδος NN + GA

7.1 Αρχιτεκτονική και λειτουργία του νευρωνικού δικτύου

Η αρχιτεκτονική του νευρωνικού δικτύου που ενσωματώνεται στο υβριδικό σχήμα της παρούσας εργασίας βασίζεται σε ένα πολυεπίπεδο perceptron (MLP), το οποίο χρησιμοποιείται ως μηχανισμός μάθησης και καθοδήγησης της εξελικτικής αναζήτησης και όχι ως αυτόνομος επιλυτής του προβλήματος. Η επιλογή του MLP ως βασικής αρχιτεκτονικής ευθυγραμμίζεται με την καθιερωμένη βιβλιογραφία, η οποία αναγνωρίζει την ικανότητά του να προσεγγίζει πολύπλοκες μη γραμμικές συναρτήσεις με σχετικά απλή δομή και ελεγχόμενο υπολογιστικό κόστος (Haykin, 2016; Bishop, 2006).

Το δίκτυο οργανώνεται σε τρία βασικά επίπεδα: επίπεδο εισόδου, ένα κρυφό επίπεδο και επίπεδο εξόδου. Το επίπεδο εισόδου δέχεται ως χαρακτηριστικά πληροφορίες που σχετίζονται με τα αντικείμενα του προβλήματος του σακιδίου, όπως βάρη και αξίες, ή κατάλληλους κανονικοποιημένους συνδυασμούς αυτών. Η επιλογή περιορισμένου αριθμού χαρακτηριστικών στο επίπεδο εισόδου αποσκοπεί στη διατήρηση της γενικευσιμότητας του μοντέλου και στην αποφυγή υπερπροσαρμογής, δεδομένου ότι το νευρωνικό δίκτυο εκπαιδεύεται σε δεδομένα που προέρχονται από συνθετικά στιγμιότυπα του προβλήματος (Bishop, 2006; SmithMiles, 1999).

Το κρυφό επίπεδο αποτελεί τον κύριο φορέα της εκφραστικής ικανότητας του δικτύου. Η ύπαρξη ενός μόνο κρυφού επιπέδου κρίνεται επαρκής στο πλαίσιο της παρούσας εφαρμογής, σύμφωνα με το θεώρημα καθολικής προσέγγισης, το οποίο διασφαλίζει ότι ένα MLP με ένα κρυφό επίπεδο μπορεί να προσεγγίσει αυθαίρετα καλά συνεχείς συναρτήσεις υπό κατάλληλες συνθήκες (Bishop, 2006). Η επιλογή αυτή συνάδει επίσης με τη φιλοσοφία χρήσης του νευρωνικού δικτύου ως heuristic component και όχι ως πολύπλοκου μοντέλου βαθιάς μάθησης.

Το επίπεδο εξόδου του δικτύου παράγει τιμές που ερμηνεύονται ως εκτιμήσεις ή πιθανότητες επιλογής των αντικειμένων στο σακίδιο. Η έξοδος αυτή δεν αντιστοιχεί σε τελική δυαδική απόφαση, αλλά σε συνεχή πληροφορία καθοδήγησης, η οποία χρησιμοποιείται για την αρχικοποίηση ή τη μεροληψία (biasing) μέρους του πληθυσμού του γενετικού αλγορίθμου. Με τον τρόπο αυτό, το νευρωνικό δίκτυο λειτουργεί ως μηχανισμός εκτίμησης της σχετικής σημασίας των μεταβλητών απόφασης, χωρίς να επιβάλλει δεσμευτικές επιλογές που θα περιόριζαν την εξερευνητική ικανότητα του GA (SmithMiles, 1999).

Η εκπαίδευση του MLP πραγματοποιείται μέσω επιβλεπόμενης μάθησης, με χρήση δεδομένων που προκύπτουν από γνωστές λύσεις ή από λύσεις υψηλής ποιότητας σε μικρότερα στιγμιότυπα του προβλήματος. Η διαδικασία αυτή επιτρέπει στο δίκτυο να συσχετίσει χαρακτηριστικά των αντικειμένων με πρότυπα επιλογής που εμφανίζονται σε αποδοτικές λύσεις. Ωστόσο, η εκπαίδευση δεν στοχεύει στην ακριβή αναπαραγωγή βέλτιστων λύσεων, αλλά στη σύλληψη γενικών τάσεων που μπορούν να βελτιώσουν τη διαδικασία αρχικοποίησης του πληθυσμού (Hopfield and Tank, 1985).

Η αρχιτεκτονική αυτή εντάσσεται σαφώς στην κατηγορία των υψηλού επιπέδου υβριδικών σχημάτων, όπου το νευρωνικό δίκτυο και ο γενετικός αλγόριθμος λειτουργούν ως διακριτά αλλά συνεργαζόμενα υποσυστήματα. Σύμφωνα με την ταξινόμια των υβριδικών μεταερευνητικών μεθόδων, το MLP δεν παρεμβαίνει στους εσωτερικούς τελεστές του GA, αλλά επηρεάζει έμμεσα την αναζήτηση μέσω της παροχής πληροφορίας αρχικοποίησης και καθοδήγησης (Talbi, 2002).

7.2 Δομή και λειτουργία του γενετικού αλγορίθμου (GA)

Ο γενετικός αλγόριθμος που ενσωματώνεται στο υβριδικό σχήμα της παρούσας εργασίας αποτελεί μία κλασική εξελικτική μέθοδο πληθυσμιακής αναζήτησης, σχεδιασμένη για την αντιμετώπιση προβλημάτων συνδυαστικής βελτιστοποίησης με μεγάλο και διακριτό χώρο λύσεων. Η λειτουργία του βασίζεται στις αρχές της φυσικής επιλογής και της γενετικής εξέλιξης, με στόχο τη σταδιακή βελτίωση ενός πληθυσμού υποψήφιων λύσεων ως προς μία συνάρτηση καταλληλότητας (Goldberg, 1989; Mitchell, 1998).

Κάθε υποψήφια λύση του προβλήματος του σακιδίου αναπαρίσταται ως χρωμόσωμα δυαδικής μορφής, όπου το μήκος του χρωμοσώματος ισούται με τον αριθμό των αντικειμένων και κάθε γονίδιο αντιστοιχεί σε μία δυαδική μεταβλητή απόφασης. Ο αρχικός πληθυσμός του γενετικού αλγορίθμου αποτελείται από ένα σύνολο τέτοιων χρωμοσωμάτων και περιλαμβάνει τόσο τυχαία παραγόμενες λύσεις όσο και λύσεις που προκύπτουν από την καθοδήγηση του νευρωνικού δικτύου. Η πληθυσμιακή αυτή προσέγγιση επιτρέπει την παράλληλη διερεύνηση πολλαπλών περιοχών του χώρου λύσεων και διαφοροποιεί ουσιαστικά τον GA από τοπικές μεθόδους αναζήτησης (Eiben, 2016).

Η αξιολόγηση των λύσεων πραγματοποιείται μέσω συνάρτησης καταλληλότητας, η οποία συνδέεται άμεσα με την αντικειμενική συνάρτηση του προβλήματος του σακιδίου. Για κάθε χρωμόσωμα υπολογίζεται η συνολική αξία των επιλεγμένων αντικειμένων, ενώ παράλληλα λαμβάνεται υπόψη ο περιορισμός χωρητικότητας. Σε περιπτώσεις παραβίασης του περιορισμού, εφαρμόζεται μηχανισμός διαχείρισης περιορισμών, όπως συναρτήσεις ποινής ή διαδικασίες επιδιόρθωσης, ώστε να αποθαρρύνονται μη εφικτές λύσεις χωρίς να αποκλείονται πλήρως από την εξελικτική διαδικασία (Michalewicz and Schoenauer, 2020).

Η εξελικτική διαδικασία εξελίσσεται σε διακριτές γενιές. Σε κάθε γενιά εφαρμόζεται πρώτα τελεστής επιλογής, ο οποίος καθορίζει ποια άτομα του πληθυσμού θα χρησιμοποιηθούν ως γονείς για την παραγωγή απογόνων. Η επιλογή βασίζεται στην καταλληλότητα των λύσεων και υλοποιείται με στοχαστικό τρόπο, έτσι ώστε λύσεις υψηλής ποιότητας να έχουν αυξημένη πιθανότητα αναπαραγωγής, χωρίς ωστόσο να αποκλείεται η συμμετοχή λιγότερο αποδοτικών λύσεων. Η ιδιότητα αυτή είναι κρίσιμη για τη διατήρηση της ποικιλομορφίας του πληθυσμού και για την αποφυγή πρόωρης σύγκλισης (Mitchell, 1998).

Ο ανασυνδυασμός (crossover) εφαρμόζεται στους επιλεγμένους γονείς και αποτελεί τον κύριο μηχανισμό παραγωγής νέων λύσεων. Στη δυαδική αναπαράσταση του knapsack, ο ανασυνδυασμός πραγματοποιείται μέσω απλών τελεστών, όπως ο μονοσημειακός ή ο πολυσημειακός crossover, οι οποίοι ανταλλάσσουν τμήματα των χρωμοσωμάτων των γονέων. Ο μηχανισμός αυτός επιτρέπει τον συνδυασμό επιτυχημένων δομικών χαρακτηριστικών διαφορετικών λύσεων και συμβάλλει στην εξερεύνηση νέων περιοχών του χώρου λύσεων (Goldberg, 1989).

Η μετάλλαξη εφαρμόζεται σε επίπεδο γονιδίων και εισάγει τυχαίες μεταβολές μικρής κλίμακας, όπως η αντιστροφή της τιμής ενός bit. Ο ρόλος της μετάλλαξης είναι συμπληρωματικός προς τον ανασυνδυασμό και αφορά κυρίως τη διατήρηση της γενετικής ποικιλομορφίας του πληθυσμού. Μέσω της μετάλλαξης καθίσταται δυνατή η εξερεύνηση περιοχών του χώρου λύσεων που δεν είναι προσβάσιμες μόνο μέσω ανασυνδυασμού, καθώς και η αποφυγή εγκλωβισμού σε τοπικά άριστα (Eiben, 2016).

Η εξελικτική διαδικασία επαναλαμβάνεται για προκαθορισμένο αριθμό γενεών ή έως ότου ικανοποιηθεί κάποιο κριτήριο τερματισμού, όπως η σύγκλιση της καταλληλότητας. Ο γενετικός αλγόριθμος που περιγράφεται εδώ δεν επιδιώκει τη μαθηματική απόδειξη βελτιστότητας, αλλά την παραγωγή λύσεων

υψηλής ποιότητας εντός αποδεκτού υπολογιστικού χρόνου. Στο πλαίσιο της παρούσας εργασίας, ο GA λειτουργεί ως ο βασικός μηχανισμός εξελικτικής βελτίωσης, στον οποίο ενσωματώνεται η πληροφορία που παρέχει το νευρωνικό δίκτυο, σύμφωνα με τις αρχές των υβριδικών μεταερευτικών μεθόδων υψηλού επιπέδου (Talbi, 2002).

7.3 Στρατηγική συνδυασμού νευρωνικού δικτύου και γενετικού αλγορίθμου

Ο συνδυασμός του νευρωνικού δικτύου με τον γενετικό αλγόριθμο στην παρούσα εργασία υλοποιείται ως υβριδικό σχήμα υψηλού επιπέδου (high-level hybrid), στο οποίο τα δύο υποσυστήματα παραμένουν διακριτά και αλληλεπιδρούν με σαφώς καθορισμένο ρόλο. Το νευρωνικό δίκτυο δεν παρεμβαίνει στη λειτουργία των εξελικτικών τελεστών ούτε τροποποιεί δυναμικά τη διαδικασία επιλογής, ανασυνδυασμού ή μετάλλαξης. Αντιθέτως, χρησιμοποιείται ως μηχανισμός καθοδήγησης της αναζήτησης μέσω της παραγωγής πληροφορίας αρχικοποίησης, η οποία ενσωματώνεται στον γενετικό αλγόριθμο πριν από την έναρξη της εξελικτικής διαδικασίας (Talbi, 2002).

Συγκεκριμένα, το νευρωνικό δίκτυο εκπαιδεύεται ώστε να εκτιμά τη σχετική καταλληλότητα ή την πιθανότητα επιλογής των αντικειμένων του προβλήματος του σακιδίου, με βάση τα χαρακτηριστικά τους. Η έξοδος του δικτύου δεν αποτελεί τελική λύση του προβλήματος, αλλά ένα συνεχές σήμα καθοδήγησης που μεταφράζεται σε πιθανοκρατικές επιλογές κατά τη δημιουργία μέρους του αρχικού πληθυσμού του γενετικού αλγορίθμου. Με τον τρόπο αυτό, το νευρωνικό δίκτυο συμβάλλει στη δημιουργία αρχικών λύσεων υψηλότερης ποιότητας σε σύγκριση με την πλήρως τυχαία αρχικοποίηση, χωρίς να περιορίζει τον εξερευνητικό χαρακτήρα της μεθόδου. Ο αρχικός πληθυσμός του γενετικού αλγορίθμου διαμορφώνεται ως μίγμα δύο υποπληθυσμών: αφενός λύσεων που προκύπτουν από την καθοδήγηση του νευρωνικού δικτύου και αφετέρου τυχαία παραγόμενων λύσεων. Η στρατηγική αυτή αποσκοπεί στη διατήρηση της γενετικής ποικιλομορφίας και στην αποφυγή πρόωρης σύγκλισης σε περιορισμένες περιοχές του χώρου λύσεων. Η παρουσία τυχαίων ατόμων εξασφαλίζει ότι ο γενετικός αλγόριθμος διατηρεί τη δυνατότητα εξερεύνησης, ακόμη και αν οι εκτιμήσεις του νευρωνικού δικτύου είναι μερικώς ανακριβείς ή μεροληπτικές (Blum and Roli, 2001).

Κατά τη διάρκεια της εξελικτικής διαδικασίας, ο γενετικός αλγόριθμος λειτουργεί αυτόνομα, εφαρμόζοντας τους κλασικούς τελεστές επιλογής, ανασυνδυασμού και μετάλλαξης χωρίς περαιτέρω εμπλοκή του νευρωνικού δικτύου. Η επιλογή αυτή συνάδει με την κατηγοριοποίηση των υβριδικών μεταερευτικών μεθόδων, σύμφωνα με την οποία ο συνδυασμός πραγματοποιείται σε επίπεδο αρχιτεκτονικής και όχι σε επίπεδο τελεστών ή εσωτερικής δυναμικής του αλγορίθμου (Talbi, 2002).

Ο ρόλος του νευρωνικού δικτύου μπορεί να χαρακτηριστεί ως έμμεσος. Δεν αντικαθιστά τον γενετικό αλγόριθμο ούτε επιδιώκει την επίλυση του προβλήματος, αλλά μεταφέρει γνώση που έχει εξαχθεί από δεδομένα σε ένα στάδιο της διαδικασίας όπου η επίδρασή της είναι ιδιαίτερα σημαντική, δηλαδή στην αρχικοποίηση του πληθυσμού. Η επιλογή αυτή στηρίζεται στη βιβλιογραφία των υβριδικών μεθόδων, η οποία επισημαίνει ότι η ποιότητα των αρχικών λύσεων μπορεί να επηρεάσει ουσιαστικά τη σύγκλιση και την τελική ποιότητα των αποτελεσμάτων, ιδίως σε προβλήματα μεγάλης κλίμακας (Blum et al., 2011).

7.4 Διαχείριση εφικτότητας και περιορισμών

Η διαχείριση της εφικτότητας (feasibility handling) αποτελεί κρίσιμο στοιχείο στον σχεδιασμό γενετικών αλγορίθμων για προβλήματα συνδυαστικής βελτιστοποίησης με περιορισμούς, όπως το 0-1 πρόβλημα του σακιδίου. Η δυαδική αναπαράσταση των λύσεων, αν και φυσικά συμβατή με τη δομή του προβλήματος, δεν εγγυάται ότι κάθε παραγόμενο χρωμόσωμα ικανοποιεί τον περιορισμό

χωρητικότητας. Ως αποτέλεσμα, ο γενετικός αλγόριθμος ενδέχεται να παράγει μη εφικτές λύσεις, οι οποίες πρέπει να αντιμετωπιστούν με συστηματικό τρόπο ώστε να μην υποβαθμίζεται η αποτελεσματικότητα της εξελικτικής διαδικασίας (Goldberg, 1989).

Η βιβλιογραφία διακρίνει τρεις βασικές κατηγορίες τεχνικών διαχείρισης εφικτότητας στους εξελικτικούς αλγορίθμους: συναρτήσεις ποινής (penalty functions), διαδικασίες επιδιόρθωσης (repair heuristics) και ειδικά σχεδιασμένες αναπαραστάσεις ή τελεστές που αποτρέπουν την παραγωγή μη εφικτών λύσεων. Η επιλογή της κατάλληλης προσέγγισης εξαρτάται από τη φύση του προβλήματος, την πολυπλοκότητα των περιορισμών και τον επιδιωκόμενο βαθμό παρέμβασης στη βασική λειτουργία του αλγορίθμου (Michalewicz and Schoenauer, 2020).

Στην παρούσα εργασία υιοθετείται προσέγγιση βασισμένη σε συναρτήσεις ποινής, η οποία θεωρείται από τις πιο ευέλικτες και γενικεύσιμες μεθόδους διαχείρισης περιορισμών. Σύμφωνα με την προσέγγιση αυτή, η συνάρτηση καταλληλότητας τροποποιείται ώστε να αποθαρρύνει μη εφικτές λύσεις, μειώνοντας την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης ανάλογα με το μέγεθος της παραβίασης του περιορισμού χωρητικότητας. Έτσι, λύσεις που υπερβαίνουν τη χωρητικότητα του σακιδίου παραμένουν στον πληθυσμό, αλλά έχουν μειωμένες πιθανότητες επιλογής και αναπαραγωγής σε σύγκριση με εφικτές ή οριακά μη εφικτές λύσεις. Η επιλογή αυτή επιτρέπει τη διατήρηση της εξερευνητικής ικανότητας του γενετικού αλγορίθμου, καθώς δεν αποκλείει πλήρως τμήματα του χώρου λύσεων που μπορεί να περιέχουν χρήσιμη δομική πληροφορία. Ιδίως σε πρώιμα στάδια της εξέλιξης, η παρουσία μη εφικτών λύσεων μπορεί να λειτουργήσει ως ενδιάμεσος μηχανισμός μετάβασης προς περιοχές υψηλής ποιότητας, οι οποίες καθίστανται εφικτές μέσω μικρών τροποποιήσεων που επιφέρει η μετάλλαξη ή ο ανασυνδυασμός (Goldberg, 1989).

Εναλλακτικά, στη βιβλιογραφία έχουν προταθεί διαδικασίες επιδιόρθωσης, οι οποίες μετατρέπουν άμεσα μία μη εφικτή λύση σε εφικτή, για παράδειγμα μέσω αφαίρεσης αντικειμένων χαμηλής αξίας ή χαμηλού λόγου αξίας προς βάρος. Αν και οι μέθοδοι αυτές μπορούν να αυξήσουν τον αριθμό εφικτών λύσεων στον πληθυσμό, εισάγουν πρόσθετη ευρετική λογική στον αλγόριθμο και ενδέχεται να προκαλέσουν μεροληψία στη διαδικασία αναζήτησης. Για τον λόγο αυτό, η παρούσα εργασία αποφεύγει την άμεση επιδιόρθωση λύσεων και προτιμά μια πιο ήπια και γενική αντιμετώπιση μέσω ποινών, η οποία επιτρέπει καθαρότερη ανάλυση της συμπεριφοράς του υβριδικού σχήματος (Michalewicz and Schoenauer, 2020).

Κεφάλαιο 8ο: Υλοποίηση και Πειραματική Διαδικασία

8.1 Υπολογιστικό περιβάλλον και εργαλεία υλοποίησης

Η υλοποίηση της εφαρμογής πραγματοποιήθηκε στη γλώσσα Python (έκδοση 3.10), η οποία χρησιμοποιείται ευρέως σε εφαρμογές βελτιστοποίησης και μηχανικής μάθησης και υποστηρίζεται από πληθώρα διαθέσιμων βιβλιοθηκών. Η εκτέλεση έγινε μέσω γραμμής εντολών (Command Prompt) σε περιβάλλον Windows, με χρήση εικονικού περιβάλλοντος (virtual environment), ώστε να διασφαλίζεται η ορθή διαχείριση των εξαρτήσεων και η επαναληψιμότητα των πειραμάτων. Η εκτέλεση του προγράμματος περιλάμβανε τη μετάβαση στον φάκελο του έργου, την ενεργοποίηση του εικονικού περιβάλλοντος και την εκτέλεση του αρχείου εισόδου. Για λόγους αναπαραγωγιμότητας, ορίστηκαν σταθεροί σπόροι τυχαιότητας στις διαδικασίες δημιουργίας δεδομένων και στους στοχαστικούς μηχανισμούς του αλγορίθμου.

Για την υλοποίηση του Γενετικού Αλγορίθμου (GA) χρησιμοποιήθηκε η βιβλιοθήκη DEAP, η οποία παρέχει έτοιμες δομές για τον ορισμό ατόμων, πληθυσμών και βασικών εξελικτικών τελεστών. Οι υποψήφιες λύσεις αναπαραστάθηκαν ως δυαδικά διανύσματα, με κάθε στοιχείο να αντιστοιχεί στην επιλογή ή μη ενός αντικειμένου του προβλήματος σακιδίου. Η αξιολόγηση των λύσεων βασίστηκε στον υπολογισμό της συνολικής αξίας, υπό τον περιορισμό της χωρητικότητας. Για αριθμητικούς υπολογισμούς και βασικές πράξεις σε διανύσματα χρησιμοποιήθηκε η βιβλιοθήκη NumPy, η οποία διευκολύνει την ομοιόμορφη επεξεργασία δεδομένων σε όλα τα μεγέθη προβλήματος που εξετάστηκαν.

Το Νευρωνικό Δίκτυο υλοποιήθηκε με τη χρήση του TensorFlow μέσω του Keras API και αφορούσε ένα πολυστρωματικό πλήρως συνδεδεμένο μοντέλο (Multi-Layer Perceptron). Το δίκτυο χρησιμοποιήθηκε αποκλειστικά ως μηχανισμός παραγωγής αρχικής λύσης και όχι ως ανεξάρτητος επιλυτής του προβλήματος. Η έξοδος του μοντέλου αξιοποιήθηκε για την αρχικοποίηση μέρους του πληθυσμού του γενετικού αλγορίθμου, με στόχο τη βελτίωση της ποιότητας των αρχικών λύσεων και τη μείωση του χρόνου σύγκλισης στα πρώτα στάδια της εξελικτικής διαδικασίας.

Ως σημείο αναφοράς για τη βέλτιστη λύση χρησιμοποιήθηκε επίλυση μέσω Ακέραιου Γραμμικού Προγραμματισμού (MILP) με τη βιβλιοθήκη PuLP. Το πρόβλημα διατυπώθηκε σύμφωνα με τον τυπικό ορισμό του 0–1 knapsack και επιλύθηκε με τον solver CBC, ο οποίος καλείται μέσω της διεπαφής του PuLP. Η λύση που προέκυψε χρησιμοποιήθηκε ως βέλτιστο σημείο σύγκρισης, επιτρέποντας την ποσοτική αξιολόγηση της υβριδικής προσέγγισης μέσω του υπολογισμού του optimality gap.

Τέλος, για την παρουσίαση των πειραματικών αποτελεσμάτων χρησιμοποιήθηκε η βιβλιοθήκη Matplotlib. Παρήχθησαν διακριτά γραφήματα που απεικονίζουν τη σύγκλιση του γενετικού αλγορίθμου ανά γενιά, τη μεταβολή του optimality gap σε σχέση με τη βέλτιστη λύση MILP, καθώς και, όπου κρίθηκε σκόπιμο, τη δισδιάστατη κατανομή των αντικειμένων στο επίπεδο βάρους–αξίας. Η επιλογή ξεχωριστών γραφημάτων διευκόλυνε την καθαρή αποτύπωση της συμπεριφοράς του αλγορίθμου χωρίς συγχώνευση διαφορετικών μετρικών στην ίδια απεικόνιση.

8.2 Δημιουργία και χαρακτηριστικά των δεδομένων

Η πειραματική αξιολόγηση βασίστηκε σε τεχνητά παραγόμενα δεδομένα, τα οποία δημιουργήθηκαν δυναμικά κατά την εκτέλεση του προγράμματος. Η επιλογή αυτή επιτρέπει τον έλεγχο των χαρακτηριστικών του προβλήματος, τη συστηματική μεταβολή του μεγέθους του και την επαναληψιμότητα των πειραμάτων υπό τις ίδιες συνθήκες. Για κάθε εκτέλεση, το πλήθος των αντικειμένων καθορίζεται από τον χρήστη μέσω προκαθορισμένων επιλογών (5, 10, 20, 50, 100 ή 200

αντικείμενα), ώστε να εξετάζεται η συμπεριφορά των αλγορίθμων σε διαφορετικά μεγέθη προβλήματος.

Για κάθε αντικείμενο δημιουργείται ένα ζεύγος τιμών που αντιστοιχεί στο βάρος και την αξία του. Τα βάρη παράγονται ως ακέραιοι αριθμοί εντός προκαθορισμένου διαστήματος, ενώ οι αξίες παράγονται επίσης ως ακέραιοι αριθμοί σε αντίστοιχο εύρος. Η τυχαία παραγωγή αυτών των μεγεθών διασφαλίζει ότι δεν υπάρχει προκαθορισμένη δομή ή ευνοϊκή κατανομή υπέρ συγκεκριμένης μεθόδου επίλυσης. Με τον τρόπο αυτό, κάθε στιγμιότυπο του προβλήματος αποτελεί ανεξάρτητη περίπτωση του 0–1 προβλήματος σακιδίου.

Η χωρητικότητα του σακιδίου δεν ορίζεται αυθαίρετα, αλλά υπολογίζεται ως ποσοστό του συνολικού βάρους όλων των αντικειμένων. Συγκεκριμένα, η χωρητικότητα τίθεται ίση με ένα κλάσμα (π.χ. 40%) του αθροίσματος των βαρών, ώστε να διασφαλίζεται ότι το πρόβλημα δεν είναι ούτε τετριμμένο (όλα τα αντικείμενα χωρούν) ούτε υπερβολικά περιοριστικό (ελάχιστα αντικείμενα μπορούν να επιλεγούν). Αυτή η επιλογή οδηγεί σε ρεαλιστικά στιγμιότυπα, στα οποία απαιτείται ουσιαστικός συμβιβασμός μεταξύ βάρους και αξίας.

Για λόγους αναπαραγωγιμότητας, χρησιμοποιήθηκε σταθερός σπόρος τυχειότητας (random seed) κατά τη δημιουργία των δεδομένων. Με αυτόν τον τρόπο, για την ίδια επιλογή μεγέθους προβλήματος παράγεται το ίδιο σύνολο αντικειμένων, επιτρέποντας άμεση σύγκριση μεταξύ διαφορετικών μεθόδων επίλυσης (υβριδική προσέγγιση και MILP) χωρίς να επηρεάζονται τα αποτελέσματα από τυχαίες διακυμάνσεις των δεδομένων εισόδου.

Τα παραγόμενα δεδομένα χρησιμοποιούνται ταυτόχρονα από όλες τις μεθόδους που εξετάζονται. Ο γενετικός αλγόριθμος και το νευρωνικό δίκτυο λαμβάνουν ως είσοδο τα ίδια βάρη, αξίες και περιορισμό χωρητικότητας, ενώ το ίδιο ακριβώς στιγμιότυπο του προβλήματος διατυπώνεται και επιλύεται μέσω ακέραιου γραμμικού προγραμματισμού για τον υπολογισμό της βέλτιστης λύσης αναφοράς. Με αυτόν τον τρόπο διασφαλίζεται ότι η σύγκριση μεταξύ των μεθόδων βασίζεται σε κοινό σύνολο δεδομένων και ότι οι παρατηρούμενες διαφορές οφείλονται αποκλειστικά στη μεθοδολογία επίλυσης και όχι στη φύση των δεδομένων.

8.3 Νευρωνικό Δίκτυο: Είσοδος, Έξοδος και Ρόλος στο Υβριδικό Σχήμα

Το νευρωνικό δίκτυο που χρησιμοποιείται στην παρούσα εργασία λειτουργεί ως μηχανισμός καθοδήγησης και όχι ως ανεξάρτητος επιλυτής του προβλήματος του σακιδίου. Η χρήση του περιορίζεται στην παραγωγή πληροφορίας που αξιοποιείται κατά την αρχικοποίηση του γενετικού αλγορίθμου.

Η είσοδος του νευρωνικού δικτύου αποτελείται από τα χαρακτηριστικά του στιγμιότυπου του προβλήματος, και συγκεκριμένα από τα βάρη και τις αξίες των διαθέσιμων αντικειμένων. Τα μεγέθη αυτά κανονικοποιούνται κατάλληλα ώστε να βρίσκονται σε συγκρίσιμη κλίμακα πριν δοθούν στο δίκτυο. Το νευρωνικό δίκτυο δεν λαμβάνει πληροφορία σχετικά με εφικτές ή βέλτιστες λύσεις, ούτε για την εξέλιξη της αναζήτησης, αλλά αποκλειστικά στατική περιγραφή του προβλήματος.

Η έξοδος του δικτύου είναι ένα διάνυμα πραγματικών τιμών, με μία τιμή ανά αντικείμενο, το οποίο ερμηνεύεται ως πιθανότητα ή βαθμός προτίμησης επιλογής του αντίστοιχου αντικειμένου στη λύση. Η έξοδος αυτή δεν συνιστά τελική λύση του προβλήματος και δεν εγγυάται την ικανοποίηση του περιορισμού της χωρητικότητας του σακιδίου.

Οι παραγόμενες τιμές χρησιμοποιούνται για την καθοδηγούμενη αρχικοποίηση μέρους του πληθυσμού του γενετικού αλγορίθμου. Συγκεκριμένο ποσοστό των αρχικών ατόμων δημιουργείται βάσει της εξόδου του νευρωνικού δικτύου, με την εισαγωγή ελεγχόμενης τυχαιότητας ώστε να διατηρείται ποικιλία στον πληθυσμό. Η ευθύνη για τη διασφάλιση της εφικτότητας των λύσεων, τη βελτίωση της ποιότητάς τους και τη σύγκλιση της διαδικασίας παραμένει αποκλειστικά στον γενετικό αλγόριθμο.

8.4 Ρύθμιση παραμέτρων αλγορίθμων

Η επιλογή των παραμέτρων της υλοποίησης έγινε με στόχο τη σταθερή και συγκρίσιμη συμπεριφορά των αλγορίθμων σε όλα τα μεγέθη προβλήματος που εξετάστηκαν, χωρίς εκτεταμένη διαδικασία βελτιστοποίησης υπερπαραμέτρων. Οι ίδιες βασικές ρυθμίσεις διατηρήθηκαν σε όλες τις πειραματικές εκτελέσεις, ώστε οι παρατηρούμενες διαφοροποιήσεις στα αποτελέσματα να αποδίδονται στο μέγεθος του προβλήματος και όχι σε αλλαγές παραμέτρων.

Για τον Γενετικό Αλγόριθμο, ο πληθυσμός αρχικοποιήθηκε με σταθερό πλήθος ατόμων, ανεξάρτητο από τον αριθμό των αντικειμένων. Ο αριθμός των γενεών ορίστηκε έτσι ώστε να επιτρέπει επαρκή εξερεύνηση του χώρου λύσεων, χωρίς υπερβολικό υπολογιστικό κόστος. Η πιθανότητα διασταύρωσης τέθηκε σε τιμή μεγαλύτερη της πιθανότητας μετάλλαξης, σύμφωνα με τη συνήθη πρακτική στους γενετικούς αλγορίθμους, ώστε η κύρια εξελικτική πίεση να προέρχεται από τον συνδυασμό υπαρχουσών λύσεων. Η μετάλλαξη εφαρμόστηκε με μικρή πιθανότητα σε κάθε γονίδιο, με σκοπό τη διατήρηση ποικιλίας στον πληθυσμό και την αποφυγή πρόωρης σύγκλισης.

Η επιλογή των ατόμων έγινε με tournament selection, με σταθερό μέγεθος τουρνουά, ώστε να επιτυγχάνεται ισορροπία μεταξύ εκμετάλλευσης καλών λύσεων και διατήρησης ποικιλίας. Η αναπαράσταση των λύσεων ως δυαδικών διανυσμάτων καθιστά σαφή τον ορισμό των τελεστών διασταύρωσης και μετάλλαξης, ενώ η αξιολόγηση βασίστηκε αποκλειστικά στη συνολική αξία της λύσης, υπό τον περιορισμό της χωρητικότητας.

Για το Νευρωνικό Δίκτυο, χρησιμοποιήθηκε ένα πολυστρωματικό πλήρως συνδεδεμένο μοντέλο με δύο κρυφά επίπεδα. Ο αριθμός των νευρώνων σε κάθε επίπεδο επιλέχθηκε ώστε να είναι επαρκής για την αναπαράσταση απλών συσχετίσεων μεταξύ βάρους, αξίας και χωρητικότητας, χωρίς να αυξάνεται υπερβολικά η πολυπλοκότητα του μοντέλου. Η συνάρτηση ενεργοποίησης των κρυφών επιπέδων ήταν ReLU, ενώ στο επίπεδο εξόδου χρησιμοποιήθηκε sigmoid, ώστε η έξοδος να ερμηνεύεται ως πιθανότητα επιλογής κάθε αντικειμένου. Η εκπαίδευση πραγματοποιήθηκε για προκαθορισμένο αριθμό εποχών με σταθερό μέγεθος παρτίδας (batch size), χωρίς χρήση μηχανισμών πρόωρης διακοπής.

Η έξοδος του νευρωνικού δικτύου χρησιμοποιήθηκε για την αρχικοποίηση ενός μέρους του πληθυσμού του γενετικού αλγορίθμου. Συγκεκριμένο ποσοστό των αρχικών ατόμων αντικαταστάθηκε από λύσεις που προέκυψαν από το δίκτυο, με εφαρμογή μικρής τυχαιοποίησης ώστε να διατηρείται ποικιλία. Οι υπόλοιπες λύσεις του πληθυσμού αρχικοποιήθηκαν τυχαία.

Για την επίλυση μέσω Ακέραιου Γραμμικού Προγραμματισμού (MILP) δεν απαιτήθηκε ρύθμιση υπερπαραμέτρων, πέραν της διατύπωσης του προβλήματος και της επιλογής του solver. Ο solver χρησιμοποιήθηκε με τις προεπιλεγμένες ρυθμίσεις, και ο χρόνος επίλυσης καταγράφηκε για λόγους σύγκρισης. Η λύση που προέκυψε θεωρήθηκε ως βέλτιστο σημείο αναφοράς για την αξιολόγηση της υβριδικής προσέγγισης.

8.5 Πειραματική διαδικασία και πρωτόκολλο εκτέλεσης

Η διαδικασία εκτέλεσης των πειραμάτων ακολουθήθηκε με σταθερά και επαναλαμβανόμενα βήματα, ώστε να διασφαλίζεται η συγκρισιμότητα των αποτελεσμάτων μεταξύ διαφορετικών μεγεθών προβλήματος και διαφορετικών μεθόδων επίλυσης. Η εκτέλεση ξεκινά με την ενεργοποίηση του κατάλληλου περιβάλλοντος Pythοn και την εκκίνηση του κύριου αρχείου της εφαρμογής μέσω γραμμής εντολών. Κατά την έναρξη, ο χρήστης καλείται να επιλέξει το πλήθος των αντικειμένων του προβλήματος από ένα προκαθορισμένο σύνολο επιλογών. Η επιλογή αυτή καθορίζει άμεσα το μέγεθος του στιγμιότυπου του προβλήματος σακιδίου που θα δημιουργηθεί και θα επιλυθεί.

Μετά την επιλογή του μεγέθους, το πρόγραμμα προχωρά αυτόματα στη δημιουργία των δεδομένων εισόδου, δηλαδή των βαρών, των αξιών και της χωρητικότητας του σακιδίου, σύμφωνα με τη διαδικασία που περιγράφηκε προηγουμένως. Τα ίδια δεδομένα χρησιμοποιούνται σε όλα τα επόμενα στάδια της εκτέλεσης, ώστε κάθε μέθοδος να αξιολογείται στο ίδιο ακριβώς στιγμιότυπο του προβλήματος. Στη συνέχεια πραγματοποιείται η εκπαίδευση του νευρωνικού δικτύου, το οποίο χρησιμοποιεί τα παραγόμενα δεδομένα για να υπολογίσει πιθανότητες επιλογής αντικειμένων. Η εκπαίδευση ολοκληρώνεται πριν από την έναρξη του γενετικού αλγορίθμου και δεν επαναλαμβάνεται κατά τη διάρκεια της εξελικτικής διαδικασίας.

Ακολούθως, η έξοδος του νευρωνικού δικτύου αξιοποιείται για την αρχικοποίηση μέρους του πληθυσμού του γενετικού αλγορίθμου. Το υπόλοιπο μέρος του πληθυσμού δημιουργείται τυχαία, ώστε να διατηρείται ποικιλία στις αρχικές λύσεις. Με την ολοκλήρωση της αρχικοποίησης, ξεκινά η κύρια εξελικτική διαδικασία, η οποία εκτελείται για προκαθορισμένο αριθμό γενεών. Σε κάθε γενιά εφαρμόζονται διαδοχικά οι τελεστές επιλογής, διασταύρωσης και μετάλλαξης, ενώ όλες οι νέες λύσεις αξιολογούνται με βάση τη συνάρτηση καταλληλότητας που λαμβάνει υπόψη τον περιορισμό της χωρητικότητας.

Κατά τη διάρκεια της εκτέλεσης του γενετικού αλγορίθμου, καταγράφονται στατιστικά μεγέθη ανά γενιά, όπως η μέγιστη και η μέση τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης στον πληθυσμό. Παράλληλα, αποθηκεύεται η καλύτερη λύση κάθε γενιάς, ώστε να είναι δυνατή η εκ των υστέρων ανάλυση της εξελικτικής πορείας και της σύγκλισης του αλγορίθμου. Με την ολοκλήρωση όλων των γενεών, επιλέγεται η καλύτερη λύση του τελικού πληθυσμού ως αποτέλεσμα της υβριδικής μεθόδου.

Στο τελευταίο στάδιο της εκτέλεσης, το ίδιο στιγμιότυπο του προβλήματος επιλύεται μέσω ακέραιου γραμμικού προγραμματισμού με χρήση του MILP solver. Η λύση που προκύπτει θεωρείται βέλτιστη και χρησιμοποιείται ως σημείο αναφοράς για τη σύγκριση με τη λύση του γενετικού αλγορίθμου. Υπολογίζονται μετρικές σύγκρισης, όπως η διαφορά στη συνολική αξία και το optimality gap. Τέλος, παράγονται γραφικές απεικονίσεις των αποτελεσμάτων, οι οποίες εμφανίζονται διαδοχικά και απεικονίζουν τόσο τη συμπεριφορά του γενετικού αλγορίθμου κατά τη διάρκεια των γενεών όσο και τη θέση της τελικής λύσης σε σχέση με τη βέλτιστη λύση αναφοράς.

8.6 Κλίμακα και μεγέθη προβλημάτων

Για την αξιολόγηση της συμπεριφοράς της προτεινόμενης μεθόδου υπό διαφορετικές συνθήκες, εξετάστηκαν πολλαπλά μεγέθη προβλήματος, τα οποία διαφοροποιούνται ως προς τον αριθμό των διαθέσιμων αντικειμένων στο σακίδιο. Συγκεκριμένα, υιοθετήθηκαν έξι διακριτές περιπτώσεις με 5, 10, 20, 50, 100 και 200 αντικείμενα, οι οποίες επιλέχθηκαν ώστε να καλύπτουν ένα εύρος από πολύ μικρά έως σχετικά μεγάλα στιγμιότυπα του προβλήματος. Η κλιμάκωση αυτή επιτρέπει την παρατήρηση της

επίδρασης του μεγέθους του προβλήματος τόσο στη σύγκλιση του γενετικού αλγορίθμου όσο και στην ποιότητα της τελικής λύσης.

Στα μικρά μεγέθη προβλήματος (5 και 10 αντικείμενα), ο χώρος των δυνατών λύσεων είναι περιορισμένος, γεγονός που επιτρέπει στον γενετικό αλγόριθμο να προσεγγίζει ή να ταυτίζεται με τη βέλτιστη λύση αναφοράς σε μικρό αριθμό γενεών. Οι περιπτώσεις αυτές λειτουργούν ως έλεγχος ορθότητας της υλοποίησης, καθώς η σύγκριση με τη λύση του MILP solver καθιστά άμεσα εμφανή τυχόν αποκλίσεις ή αστοχίες στη διαδικασία αξιολόγησης.

Καθώς το πλήθος των αντικειμένων αυξάνεται (20 και 50 αντικείμενα), ο χώρος αναζήτησης μεγαλώνει εκθετικά και η εύρεση της βέλτιστης λύσης καθίσταται υπολογιστικά πιο απαιτητική. Σε αυτές τις περιπτώσεις, η σύγκριση μεταξύ της υβριδικής προσέγγισης και της βέλτιστης λύσης αναφοράς παρέχει χρήσιμες ενδείξεις για τη συμπεριφορά σύγκλισης του γενετικού αλγορίθμου και τον ρόλο της αρχικοποίησης μέσω του νευρωνικού δικτύου. Τα μεγέθη αυτά θεωρούνται ενδιάμεσα και είναι αντιπροσωπευτικά προβλημάτων όπου οι ευρετικές μέθοδοι παρουσιάζουν πλεονεκτήματα έναντι των ακριβών μεθόδων ως προς τον χρόνο επίλυσης.

Στα μεγαλύτερα μεγέθη προβλήματος (100 και 200 αντικείμενα), ο αριθμός των δυνατών συνδυασμών καθιστά την εξαντλητική αναζήτηση πρακτικά αδύνατη, ενώ ακόμη και οι ακριβείς μέθοδοι απαιτούν αυξημένο υπολογιστικό χρόνο. Σε αυτές τις περιπτώσεις, το ενδιαφέρον επικεντρώνεται κυρίως στη δυνατότητα της υβριδικής μεθόδου να παράγει λύσεις υψηλής ποιότητας εντός αποδεκτού χρόνου, καθώς και στη συμπεριφορά του optimality gap σε σχέση με τη βέλτιστη λύση αναφοράς. Η ανάλυση αυτών των περιπτώσεων επιτρέπει την αξιολόγηση της κλιμακωσιμότητας της προτεινόμενης προσέγγισης.

Κεφάλαιο 9ο: Αποτελέσματα και Σύγκριση

9.1 Πειραματική διάταξη και μετρικές αξιολόγησης

Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της πειραματικής αξιολόγησης της προτεινόμενης υβριδικής μεθόδου, η οποία συνδυάζει νευρωνικό δίκτυο και γενετικό αλγόριθμο για την επίλυση του προβλήματος του σακιδίου. Τα πειράματα πραγματοποιήθηκαν για όλα τα διαθέσιμα μεγέθη προβλήματος που υποστηρίζει η υλοποίηση (5, 10, 20, 50, 100 και 200 αντικείμενα). Ωστόσο, για λόγους σαφήνειας και αποφυγής επαναλήψεων, στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάζονται αντιπροσωπευτικά αποτελέσματα για τρία χαρακτηριστικά μεγέθη: ένα μικρό, ένα μεσαίο και ένα μεγάλο πρόβλημα. Τα υπόλοιπα μεγέθη παρουσιάζουν ποιοτικά παρόμοια συμπεριφορά και χρησιμοποιούνται επικουρικά στη συνολική σύγκριση.

Η αξιολόγηση της μεθόδου βασίστηκε σε σύγκριση με τη βέλτιστη λύση που προκύπτει από την επίλυση του ίδιου στιγμιότυπου μέσω ακέραιου γραμμικού προγραμματισμού (MILP), η οποία χρησιμοποιείται ως σημείο αναφοράς. Για κάθε εκτέλεση καταγράφηκαν τόσο τα τελικά αποτελέσματα όσο και η εξελικτική πορεία του γενετικού αλγορίθμου ανά γενιά. Οι βασικές μετρικές αξιολόγησης που χρησιμοποιούνται είναι η συνολική αξία της λύσης, η συμμόρφωση στον περιορισμό της χωρητικότητας, καθώς και το optimality gap, το οποίο εκφράζει τη σχετική απόκλιση της λύσης του γενετικού αλγορίθμου από τη βέλτιστη λύση αναφοράς.

Για την ανάλυση της δυναμικής συμπεριφοράς του αλγορίθμου χρησιμοποιούνται γραφήματα σύγκλισης, στα οποία απεικονίζεται η μέγιστη και η μέση τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης ανά γενιά, σε συνδυασμό με τη σταθερή τιμή της βέλτιστης λύσης MILP. Επιπλέον, παρουσιάζονται γραφήματα της εξέλιξης του optimality gap, τα οποία επιτρέπουν την άμεση εκτίμηση του ρυθμού προσέγγισης της βέλτιστης λύσης. Σε επιλεγμένη περίπτωση μεσαίου μεγέθους προβλήματος, συμπληρωματικά παρουσιάζεται και δισδιάστατη απεικόνιση των αντικειμένων στο επίπεδο βάρους-αξίας, με σκοπό την ερμηνευτική κατανόηση της τελικής επιλογής αντικειμένων από τον αλγόριθμο.

9.2 Αποτελέσματα για μικρής κλίμακας στιγμιότυπα ($N = 10$)

Παρακάτω παρουσιάζονται τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την εφαρμογή της προτεινόμενης υβριδικής μεθόδου (Γενετικός Αλγόριθμος με αρχικοποίηση από Νευρωνικό Δίκτυο) σε πρόβλημα σακιδίου μικρού μεγέθους, με πλήθος αντικειμένων ίσο με $N = 10$.

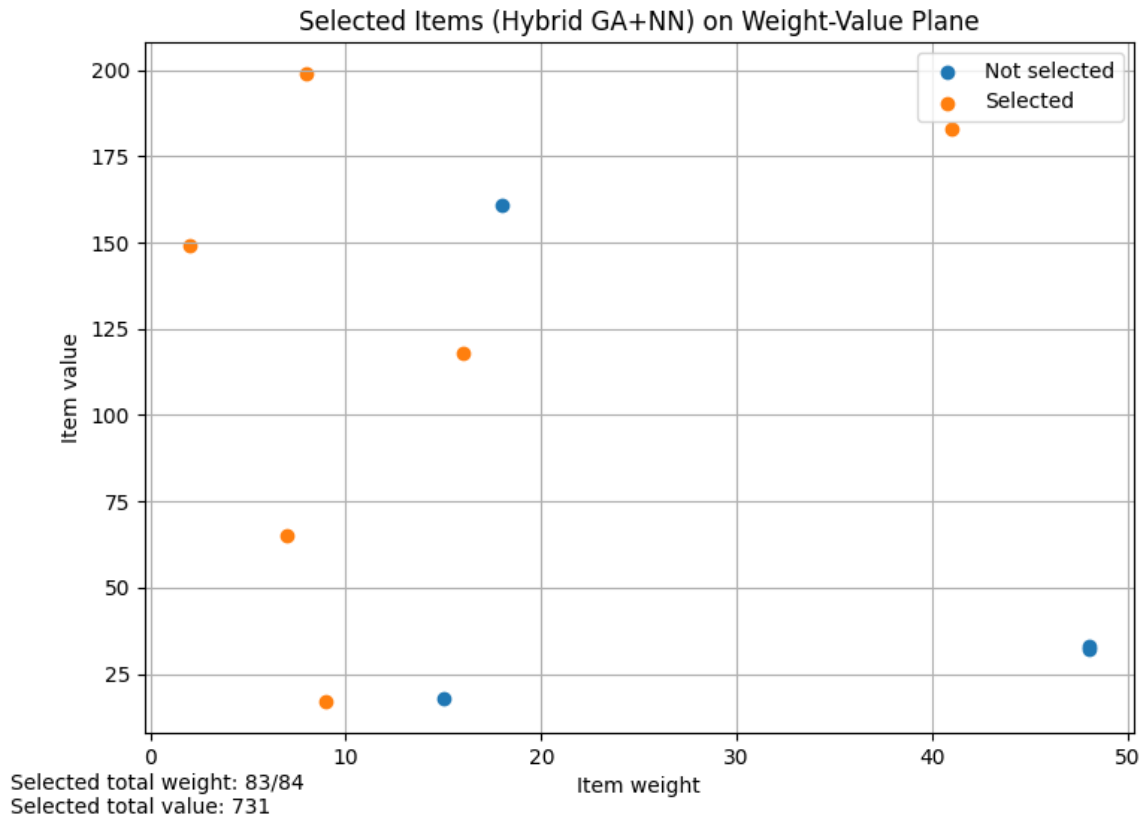
Για το συγκεκριμένο πείραμα δημιουργήθηκε τυχαίο σύνολο δέκα αντικειμένων, με ακέραιες τιμές βάρους και αξίας, ενώ η χωρητικότητα του σακιδίου ορίστηκε ως ποσοστό του συνολικού βάρους των αντικειμένων. Παράλληλα, υπολογίστηκε η βέλτιστη λύση αναφοράς με χρήση ακριβούς επιλύτη μικτού ακέραιου γραμμικού προγραμματισμού, ώστε να υπάρχει σημείο σύγκρισης για τα αποτελέσματα του ευρετικού αλγορίθμου.

Αρχικά, το νευρωνικό δίκτυο εκπαιδεύτηκε πάνω σε δεδομένα που παρήχθησαν από την ίδια περίπτωση προβλήματος, με στόχο την παραγωγή μιας αρχικής λύσης (μάσκας επιλογής αντικειμένων). Η λύση αυτή χρησιμοποιήθηκε ως αρχικοποίηση μέρους του πληθυσμού του γενετικού αλγορίθμου, ενώ ο υπόλοιπος πληθυσμός δημιουργήθηκε τυχαία. Στη συνέχεια, ο γενετικός αλγόριθμος εκτελέστηκε για προκαθορισμένο αριθμό γενεών, με καταγραφή στατιστικών μεγεθών ανά γενιά.

Στο γράφημα 1 απεικονίζεται η τελική λύση που παρήγαγε ο υβριδικός αλγόριθμος στον χώρο βάρους-αξίας. Κάθε σημείο αντιστοιχεί σε ένα αντικείμενο, με τον οριζόντιο άξονα να εκφράζει το βάρος και τον κατακόρυφο άξονα την αξία του. Τα αντικείμενα που επιλέχθηκαν στη τελική λύση επισημαίνονται

διακριτά από τα μη επιλεγμένα, ενώ στο γράφημα αναγράφονται το συνολικό βάρος της λύσης σε σχέση με τη χωρητικότητα του σακιδίου και η συνολική αξία.

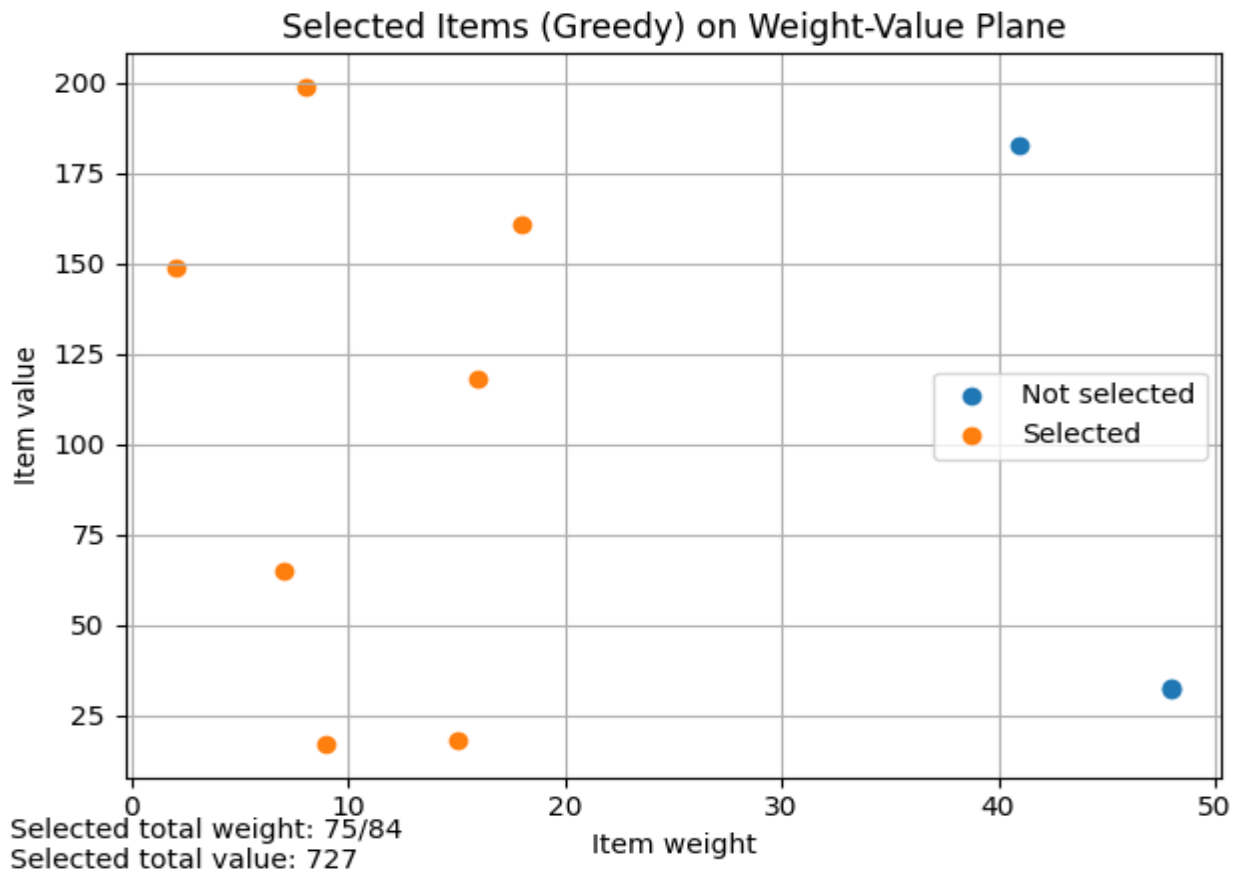
Γράφημα 1: Αναπαράσταση των αντικειμένων στον χώρο βάρους-αξίας και της τελικής επιλεγμένης λύσης για $N = 10$.



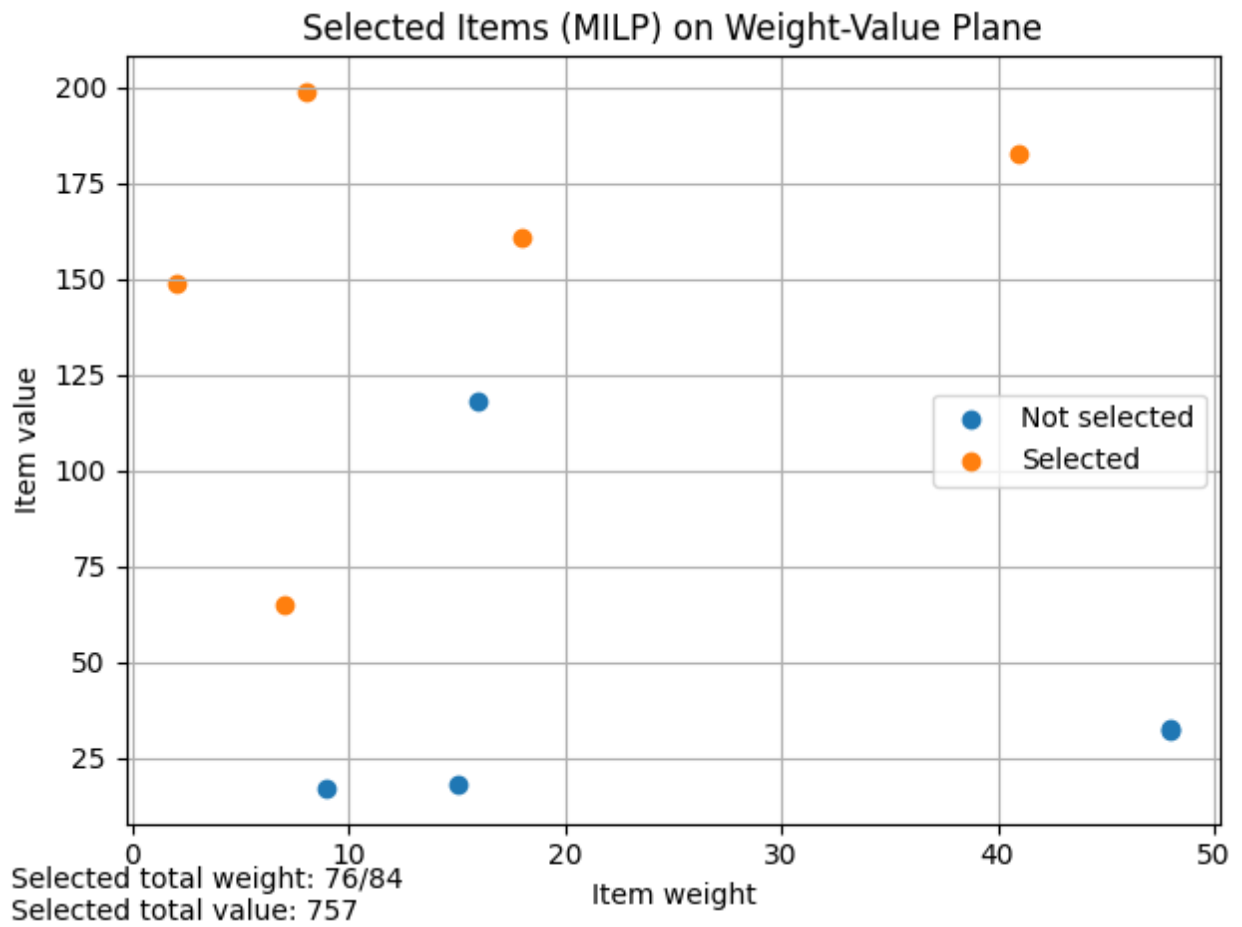
Για λόγους σύγκρισης, στην ίδια αναπαράσταση βάρους-αξίας παρουσιάζονται και οι τελικές λύσεις που προέκυψαν από μία συμβατική ευρετική μέθοδο (greedy) καθώς και από τον ακριβή επιλύτη MILP. Στα αντίστοιχα γραφήματα αποτυπώνονται οι διαφορετικές επιλογές αντικειμένων που πραγματοποιεί κάθε μέθοδος, παρότι όλες οι λύσεις ικανοποιούν τον περιορισμό χωρητικότητας. Η σύγκριση αυτή

επιτρέπει την άμεση οπτική αντιπαράβολή της συμπεριφοράς της υβριδικής μεθόδου σε σχέση με μία απλή ευρετική προσέγγιση και τη βέλτιστη λύση αναφοράς.

Γράφημα 2: Αναπαράσταση των αντικειμένων στον χώρο βάρους-αξίας και της τελικής λύσης που παράγαγε η υβριδική μέθοδος GA+NN για πρόβλημα σακιδίου με $N = 10$ αντικείμενα.

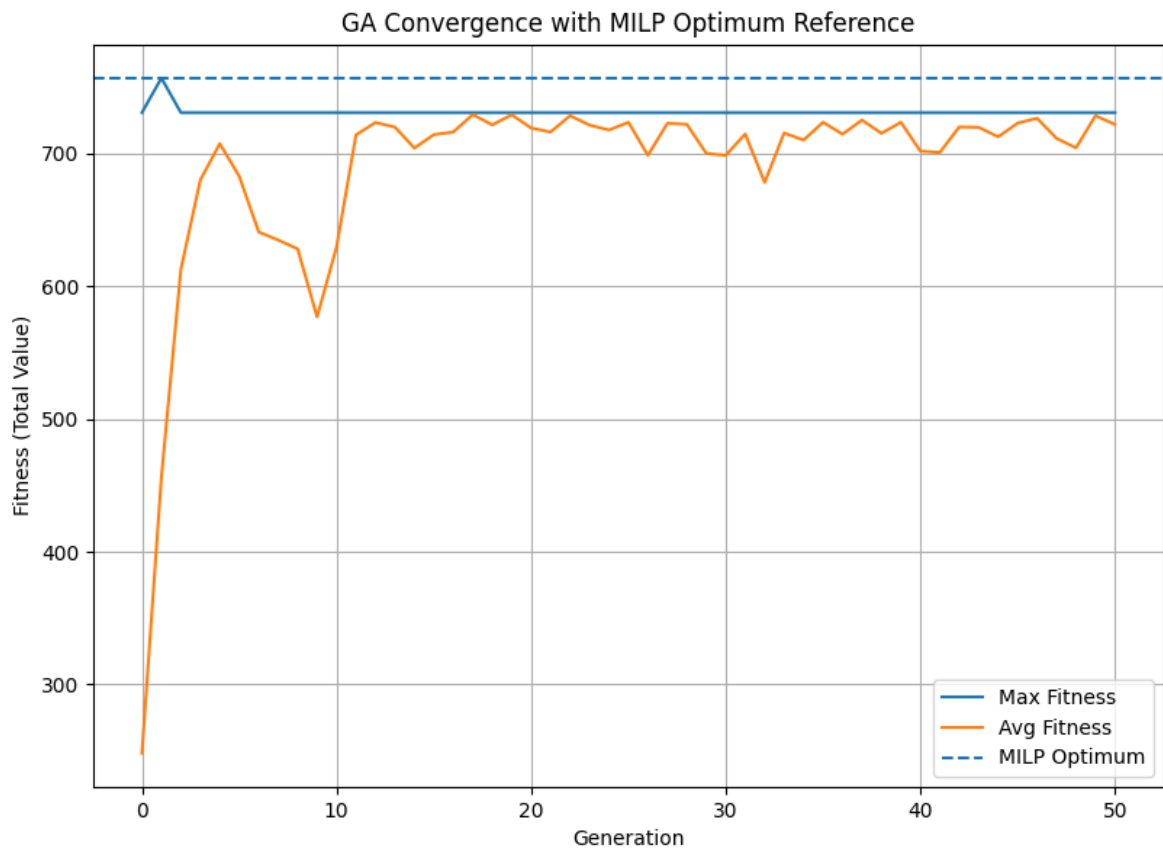


Γράφημα 3: Αναπαράσταση των αντικειμένων στον χώρο βάρους-αξίας και της τελικής λύσης που υπολογίστηκε από τον ακριβή επιλύτη MILP για πρόβλημα σακιδίου με $N = 10$ αντικείμενα.



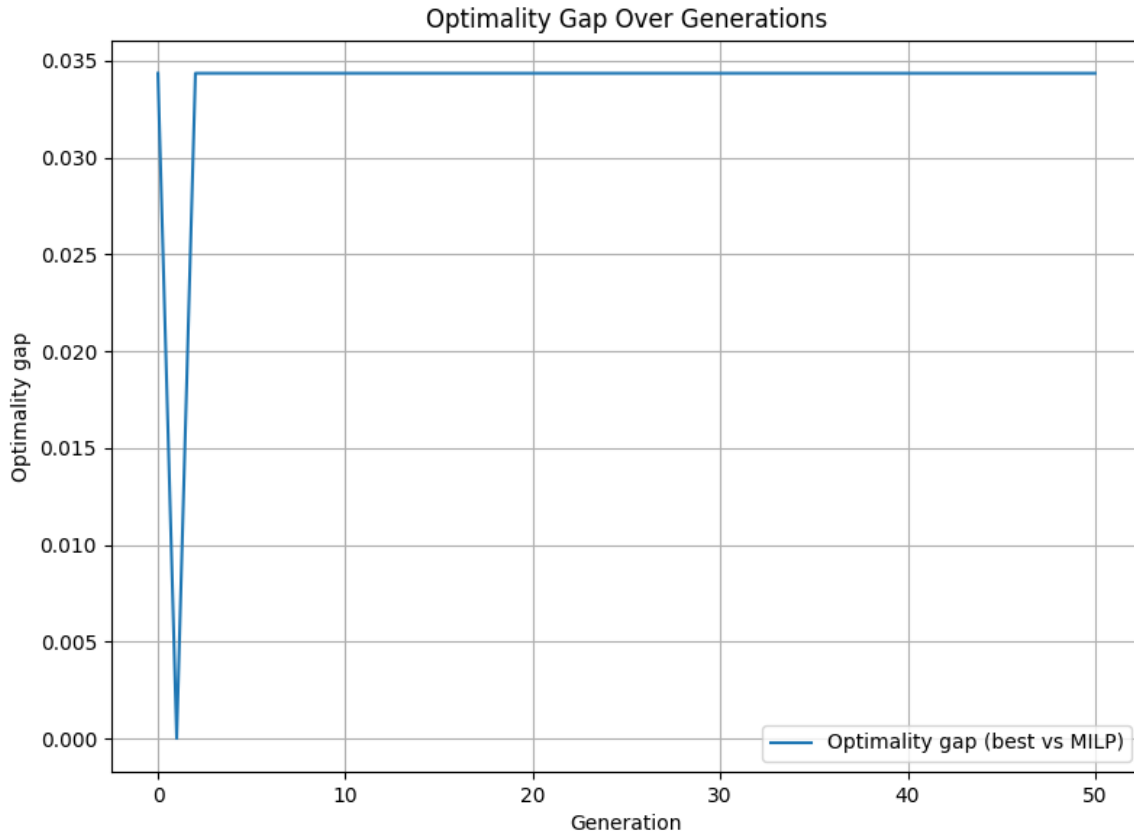
Στο γράφημα 4 παρουσιάζεται η εξέλιξη της μέγιστης και της μέσης τιμής καταλληλότητας (fitness) του πληθυσμού σε συνάρτηση με τον αριθμό γενεών. Στο ίδιο γράφημα περιλαμβάνεται και οριζόντια γραμμή που αντιστοιχεί στη βέλτιστη τιμή που υπολογίστηκε από τον επιλύτη MILP, λειτουργώντας ως σημείο αναφοράς.

Γράφημα 4: Σύγκλιση του γενετικού αλγορίθμου για πρόβλημα μεγέθους $N = 10$ με αναφορά στη βέλτιστη λύση MILP.



Για πληρέστερη αποτύπωση της απόκλισης της καλύτερης λύσης του γενετικού αλγορίθμου από τη βέλτιστη λύση αναφοράς, στο γράφημα 5 παρουσιάζεται η εξέλιξη του βέλτιστου κενού (optimality gap) ανά γενιά. Το μέγεθος αυτό υπολογίζεται ως το σχετικό σφάλμα μεταξύ της καλύτερης τιμής που έχει βρεθεί μέχρι τη συγκεκριμένη γενιά και της βέλτιστης τιμής MILP.

Γράφημα 5: Εξέλιξη του βέλτιστου κενού (optimality gap) ως προς τη λύση MILP για $N = 10$.



Για την περίπτωση μικρού μεγέθους προβλήματος με $N = 10$ αντικείμενα, πραγματοποιήθηκαν πολλαπλές ανεξάρτητες εκτελέσεις του υβριδικού αλγορίθμου (Γενετικός Αλγόριθμος με αρχικοποίηση από Νευρωνικό Δίκτυο), με σκοπό την αποτίμηση της σταθερότητας και της ακρίβειάς του σε σχέση με τη βέλτιστη λύση αναφοράς. Σε κάθε εκτέλεση δημιουργήθηκε τυχαίο σύνολο αντικειμένων, ενώ η χωρητικότητα του σακιδίου ορίστηκε ως σταθερό ποσοστό του συνολικού βάρους. Για κάθε στιγμιότυπο υπολογίστηκε η ακριβής βέλτιστη λύση με χρήση επιλύτη MILP, ώστε να είναι δυνατός ο υπολογισμός του optimality gap.

Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι ο υβριδικός αλγόριθμος προσεγγίζει συστηματικά τη βέλτιστη λύση, με μικρή αλλά μη μηδενική απόκλιση. Ο μέσος όρος του optimality gap που προέκυψε από 20 ανεξάρτητες εκτελέσεις ανέρχεται σε 3.86%, με πολύ μικρή τυπική απόκλιση (0.21%), γεγονός που υποδηλώνει σταθερή συμπεριφορά του αλγορίθμου για προβλήματα μικρής κλίμακας.

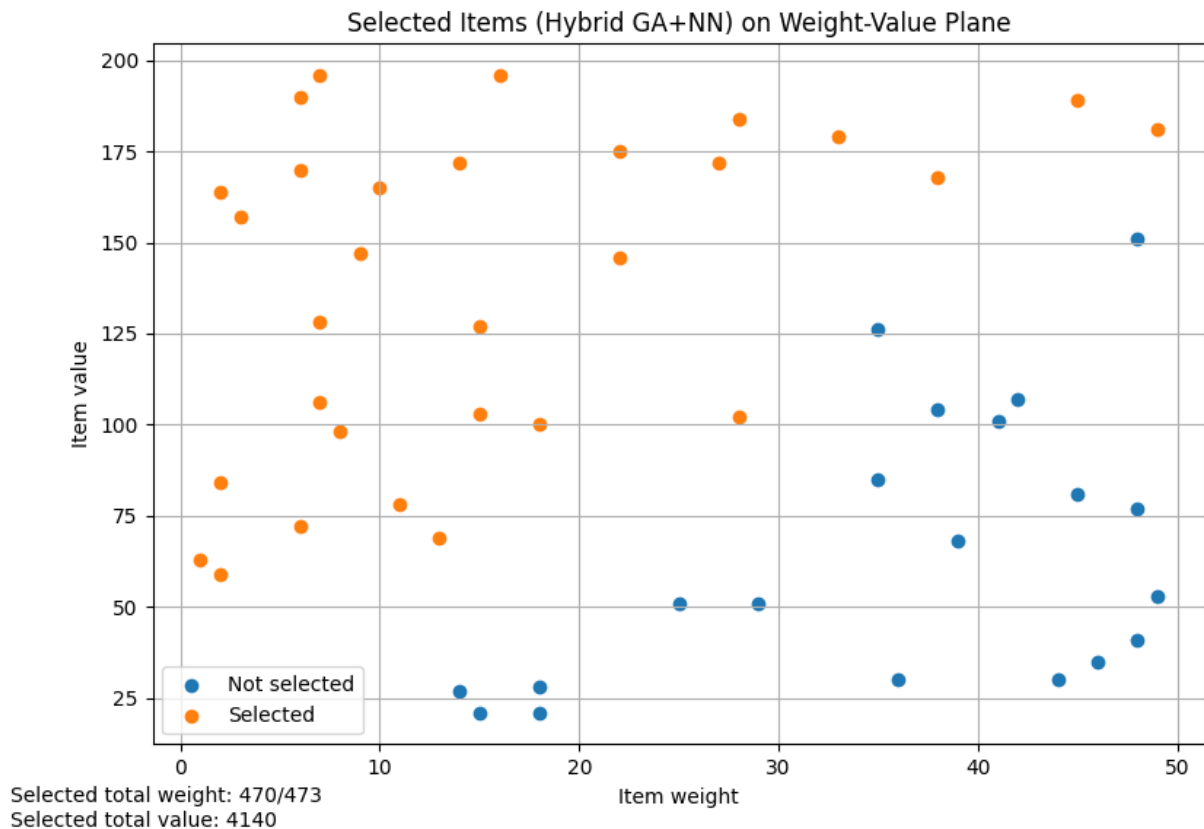
Πίνακας 1 Στατιστικά αποτελέσματα υβριδικού αλγορίθμου για πρόβλημα σακιδίου με $N = 10$ (20 εκτελέσεις).

Πλήθος αντικειμένων	Αριθμός εκτελέσεων	Μέσο optimality gap (%)	Τυπική απόκλιση (%)
10	20	3.86	0.21

9.3 Αποτελέσματα για μεσαίας κλίμακας στιγμιότυπα (N = 50)

Στην παρούσα ενότητα παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της πειραματικής διαδικασίας για πρόβλημα σακιδίου με μεσαίο μέγεθος, όπου ο αριθμός των διαθέσιμων αντικειμένων είναι ίσος με $N = 50$. Η διαδικασία εκτέλεσης, οι παράμετροι του γενετικού αλγορίθμου και η συνολική μεθοδολογία παραμένουν ίδιες με αυτές που εφαρμόστηκαν στα προβλήματα μικρότερου μεγέθους, με μοναδική διαφοροποίηση το πλήθος των αντικειμένων και τη συνολική χωρητικότητα του σακιδίου που προκύπτει από αυτά.

Γράφημα 6: Κατανομή αντικειμένων στο επίπεδο βάρους–αξίας για $N = 50$ και τελική επιλογή του υβριδικού αλγορίθμου (GA+NN)

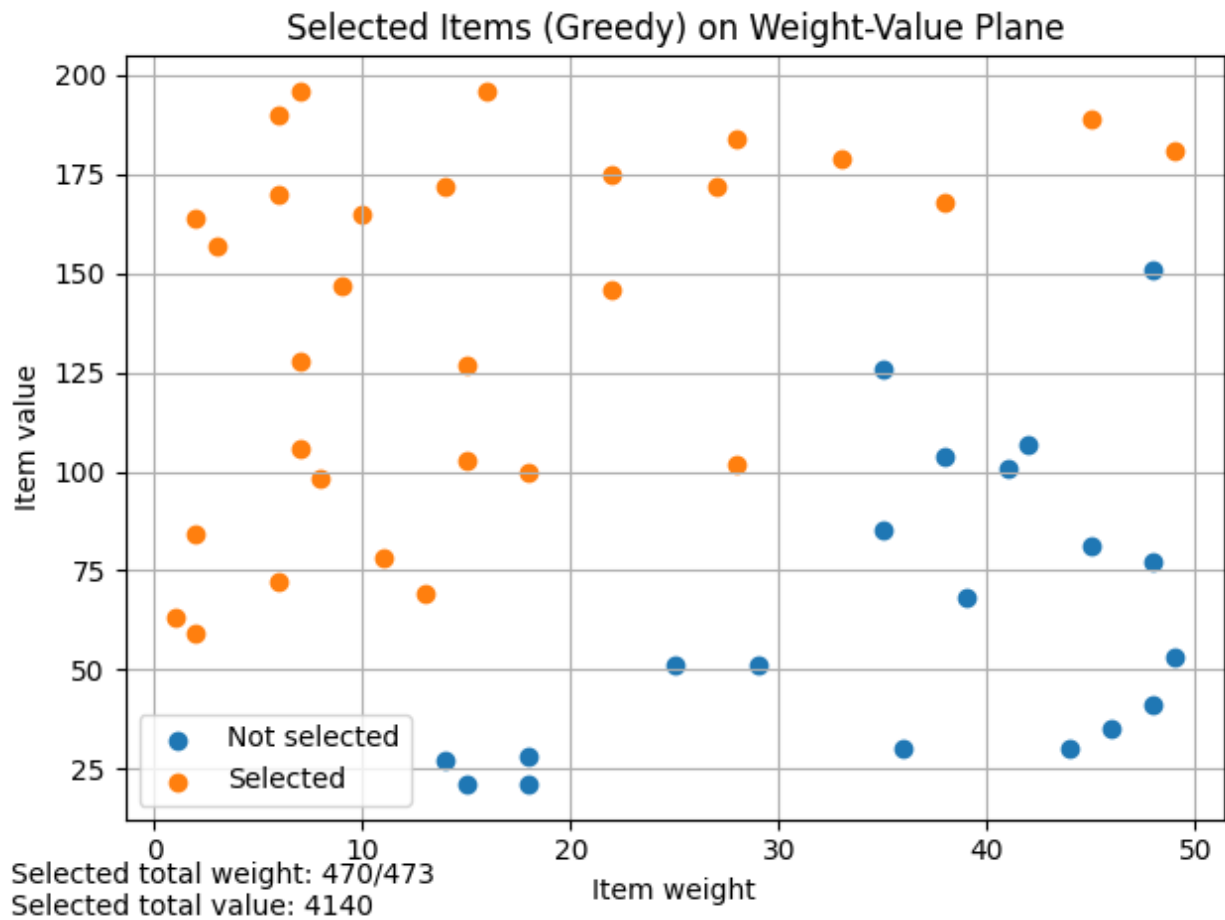


Το γράφημα 6 απεικονίζει όλα τα αντικείμενα του προβλήματος στο επίπεδο βάρους–αξίας. Κάθε σημείο αντιστοιχεί σε ένα αντικείμενο, με τον οριζόντιο άξονα να αναπαριστά το βάρος και τον κατακόρυφο άξονα την αξία του. Τα αντικείμενα που επιλέχθηκαν από την τελική λύση του υβριδικού αλγορίθμου (GA+NN) διακρίνονται από τα μη επιλεγμένα μέσω διαφορετικής χρωματικής σήμανσης. Στο ίδιο γράφημα αναγράφεται το συνολικό βάρος της λύσης σε σχέση με τη χωρητικότητα του σακιδίου, καθώς και η συνολική αξία που επιτυγχάνεται.

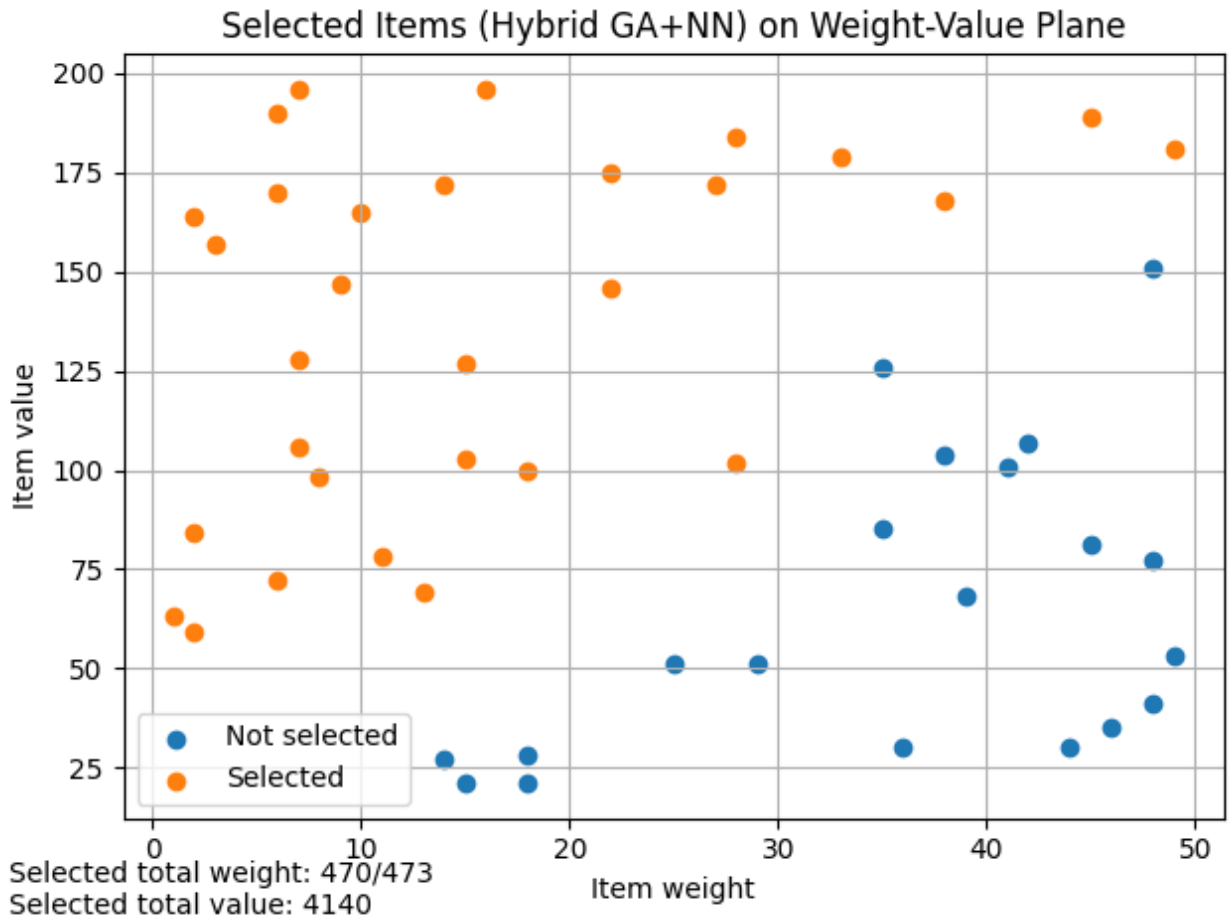
Για το πρόβλημα μεσαίας κλίμακας με $N = 50$ αντικείμενα, παρουσιάζονται αντίστοιχα οι λύσεις που υπολογίστηκαν από τον επιλύτη MILP και τη μέθοδο greedy. Λόγω του αυξημένου πλήθους αντικειμένων, η γραφική αναπαράσταση περιλαμβάνει μεγαλύτερο αριθμό σημείων, αποτυπώνοντας πιο σύνθετα πρότυπα επιλογής στον χώρο βάρους–αξίας. Τα γραφήματα αποδίδουν τη χωρική

κατανομή των επιλεγμένων αντικειμένων και καθιστούν εμφανή τον τρόπο με τον οποίο οι συμβατικές μέθοδοι διαχειρίζονται τον περιορισμό της χωρητικότητας σε προβλήματα μεγαλύτερης διάστασης.

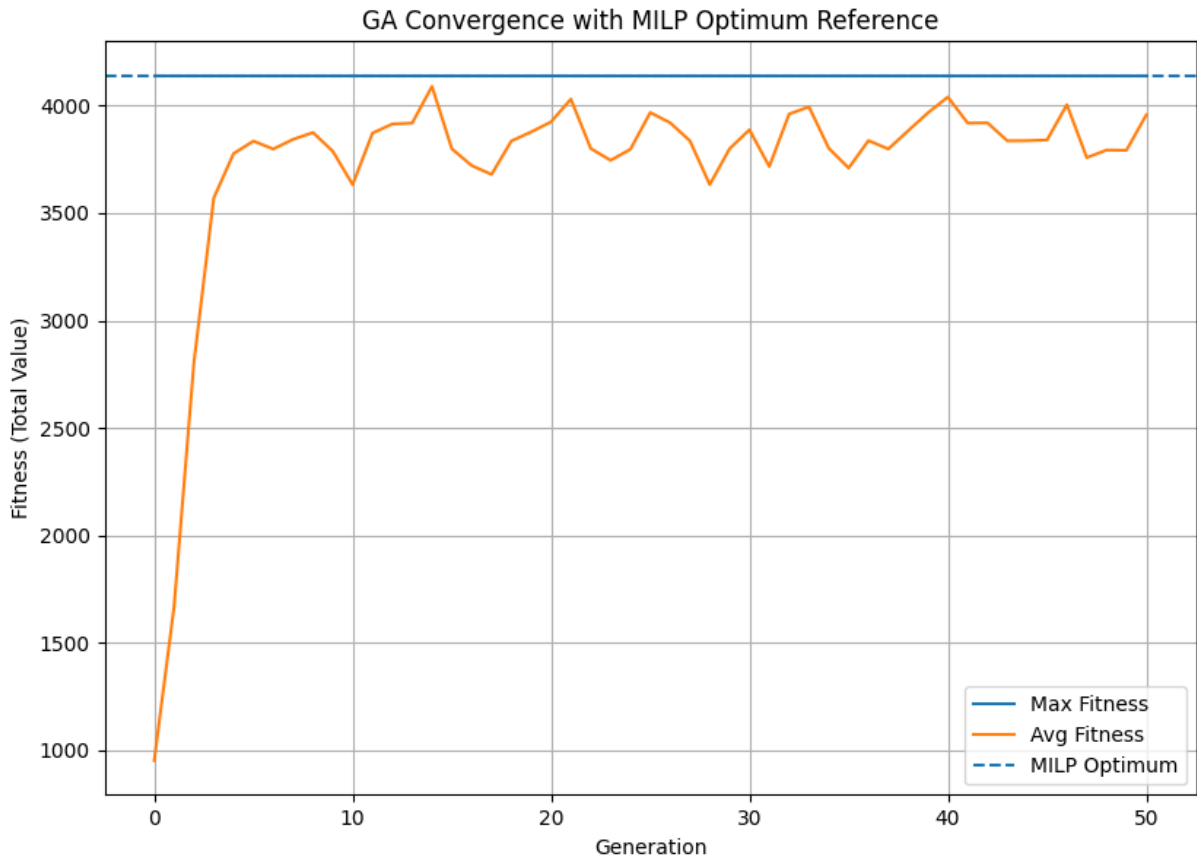
Γράφημα 7: Αναπαράσταση των αντικειμένων στον χώρο βάρους-αξίας και της τελικής λύσης που προέκυψε από τη μέθοδο greedy για πρόβλημα σακιδίου με $N = 50$ αντικείμενα.



Γράφημα 8: Αναπαράσταση των αντικειμένων στον χώρο βάρους-αξίας και της τελικής λύσης που υπολογίστηκε από τον επιλύτη MILP για πρόβλημα σακιδίου με $N = 50$ αντικείμενα.

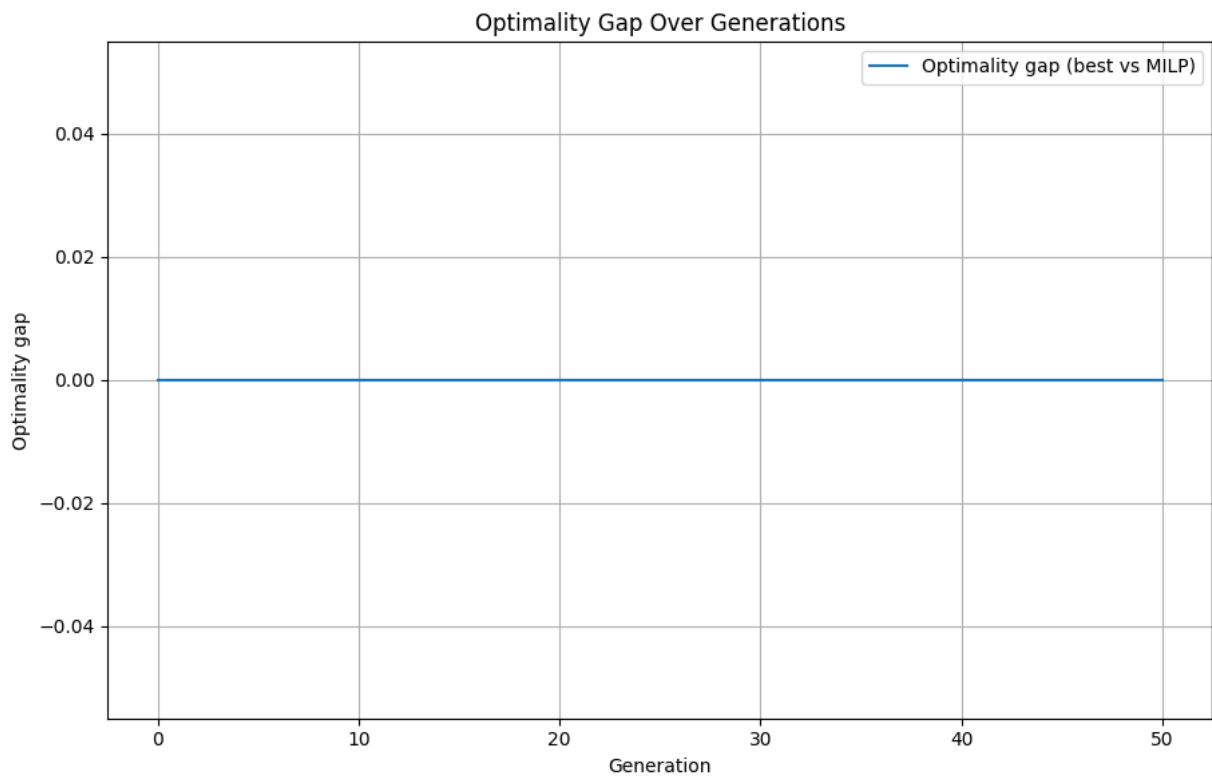


Γράφημα 9: Σύγκλιση γενετικού αλγορίθμου με αναφορά στη βέλτιστη λύση MILP για N = 50



Στο γράφημα 9 παρουσιάζεται η εξέλιξη της καταλληλότητας (fitness) του γενετικού αλγορίθμου κατά τη διάρκεια των γενεών. Στο γράφημα απεικονίζονται η μέγιστη τιμή καταλληλότητας ανά γενιά, η μέση τιμή καταλληλότητας του πληθυσμού, καθώς και η τιμή της βέλτιστης λύσης που προκύπτει από τον επιλύτη μικτού ακέραιου γραμμικού προγραμματισμού (MILP), η οποία χρησιμοποιείται ως λύση αναφοράς. Ο οριζόντιος άξονας αντιστοιχεί στον αριθμό της γενιάς και ο κατακόρυφος άξονας στη συνολική αξία της λύσης.

Γράφημα 10: Εξέλιξη του βέλτιστου κενού (optimality gap) ανά γενιά για $N = 50$



Το γράφημα 10 απεικονίζει την εξέλιξη του βέλτιστου κενού (optimality gap) κατά τη διάρκεια της εξελικτικής διαδικασίας. Το βέλτιστο κενό υπολογίζεται ως η σχετική διαφορά μεταξύ της καλύτερης λύσης που έχει βρεθεί από τον γενετικό αλγόριθμο σε κάθε γενιά και της αντίστοιχης βέλτιστης λύσης που προκύπτει από τον MILP επιλύτη. Ο οριζόντιος άξονας αντιστοιχεί στον αριθμό της γενιάς, ενώ ο κατακόρυφος άξονας στην τιμή του optimality gap.

Στη συνέχεια εξετάστηκε η συμπεριφορά της προτεινόμενης μεθόδου σε προβλήματα μεσαίας κλίμακας, με πλήθος αντικειμένων ίσο με $N = 50$. Όπως και στην προηγούμενη περίπτωση, πραγματοποιήθηκαν 20 ανεξάρτητες εκτελέσεις με διαφορετικά τυχαία στιγμιότυπα, ενώ η βέλτιστη λύση αναφοράς υπολογίστηκε με χρήση MILP. Η διαδικασία εκτέλεσης και οι παράμετροι του αλγορίθμου παρέμειναν ίδιες, ώστε τα αποτελέσματα να είναι συγκρίσιμα.

Για όλα τα εξεταζόμενα στιγμιότυπα, ο υβριδικός αλγόριθμος κατόρθωσε να εντοπίσει λύση ίσης αξίας με τη βέλτιστη λύση MILP. Ως αποτέλεσμα, το optimality gap ήταν μηδενικό σε όλες τις εκτελέσεις, ενώ και η τυπική απόκλιση υπολογίστηκε ίση με μηδέν. Το γεγονός αυτό υποδηλώνει ότι, για το συγκεκριμένο μέγεθος προβλήματος και τις εξεταζόμενες παραμέτρους, η προτεινόμενη μέθοδος επιτυγχάνει πλήρη σύγκλιση στη βέλτιστη λύση.

Πίνακας 2 Στατιστικά αποτελέσματα υβριδικού αλγορίθμου για πρόβλημα σακιδίου με $N = 50$ (20 εκτελέσεις).

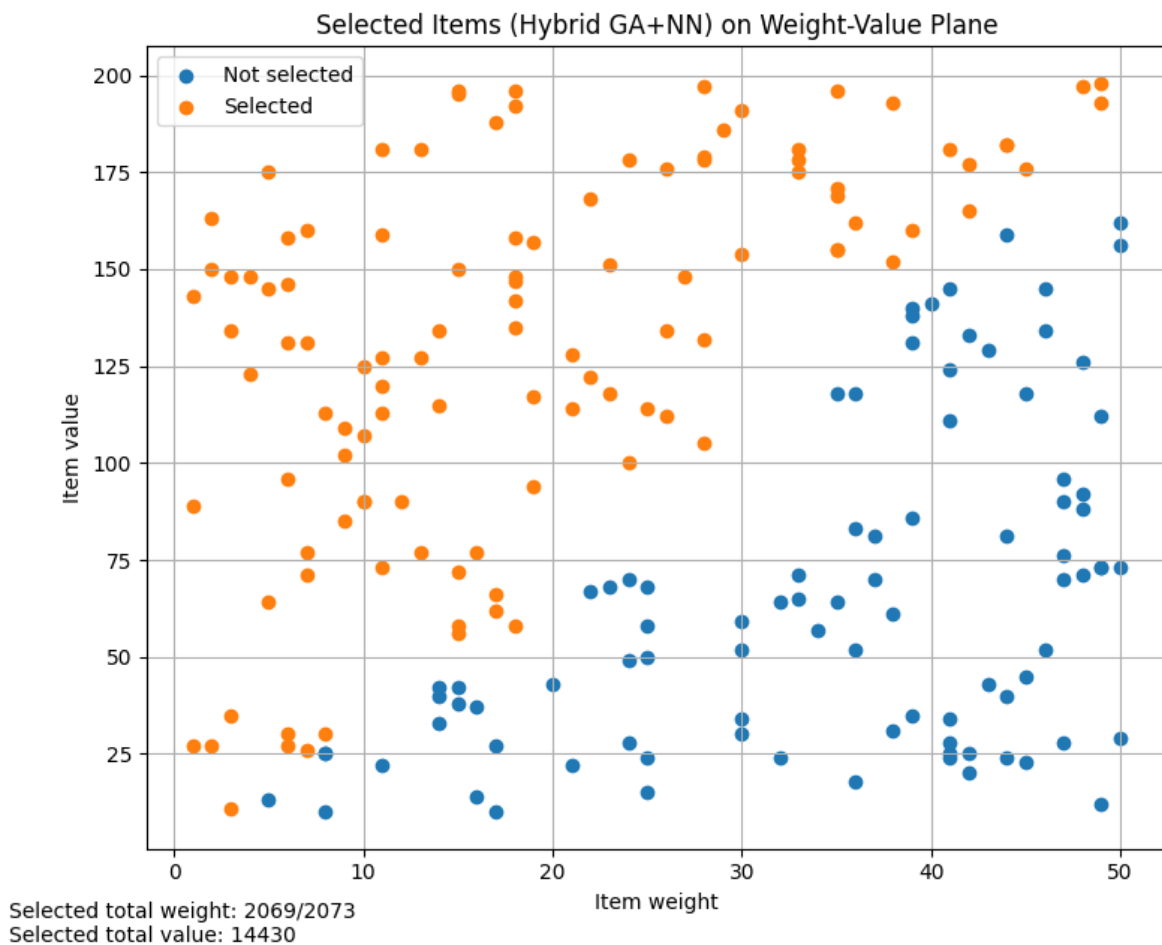
Πλήθος αντικειμένων	Αριθμός εκτελέσεων	Μέσο optimality gap (%)	Τυπική απόκλιση (%)
50	20	0.00	0.00

9.4 Αποτελέσματα για μεγάλης κλίμακας στιγμιότυπα (N = 200)

Στην παρούσα ενότητα παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της πειραματικής διαδικασίας για μεγάλο μέγεθος προβλήματος, με αριθμό αντικειμένων $N = 200$. Όπως και στις προηγούμενες περιπτώσεις, για το ίδιο στιγμιότυπο προβλήματος εφαρμόστηκε ο υβριδικός αλγόριθμος Γενετικού Αλγορίθμου με αρχικοποίηση μέσω Νευρωνικού Δικτύου, καθώς και η ακριβής μέθοδος MILP, με στόχο τη σύγκριση των παραγόμενων λύσεων.

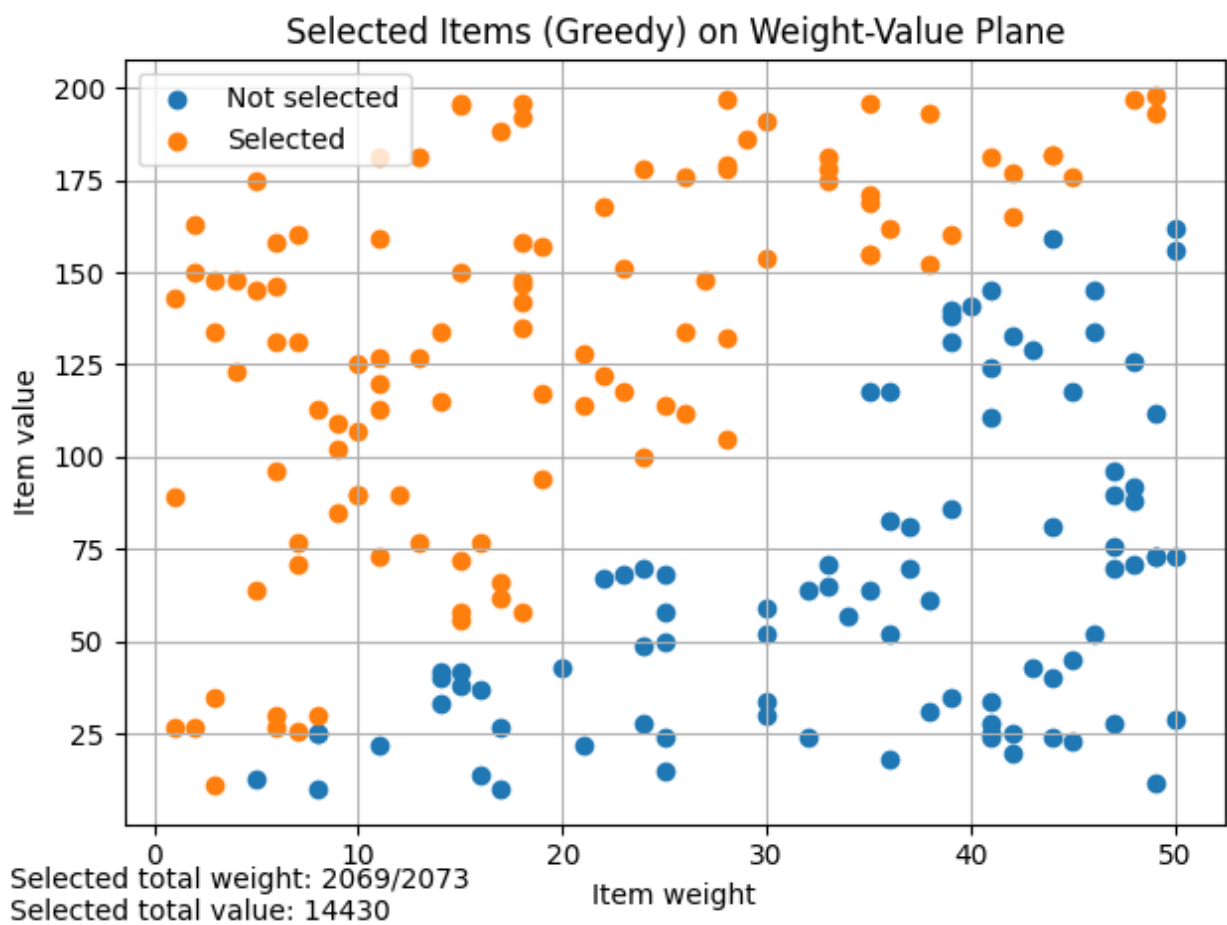
Αρχικά, στο γράφημα 7 παρουσιάζεται το διάγραμμα διασποράς βάρους–αξίας αντικειμένων, στο οποίο απεικονίζονται όλα τα αντικείμενα του προβλήματος στο επίπεδο βάρους–αξίας. Τα αντικείμενα που επιλέχθηκαν στην τελική λύση του υβριδικού αλγορίθμου επισημαίνονται διακριτά από εκείνα που δεν επιλέχθηκαν, επιτρέποντας την οπτική αποτύπωση της κατανομής των επιλεγμένων αντικειμένων σε σχέση με τα χαρακτηριστικά τους. Στο ίδιο διάγραμμα αναγράφεται επίσης το συνολικό βάρος και η συνολική αξία της επιλεγμένης λύσης.

Γράφημα 11: Διάγραμμα διασποράς βάρους–αξίας των αντικειμένων για $N = 200$, με επισήμανση των επιλεγμένων αντικειμένων από τον υβριδικό αλγόριθμο.

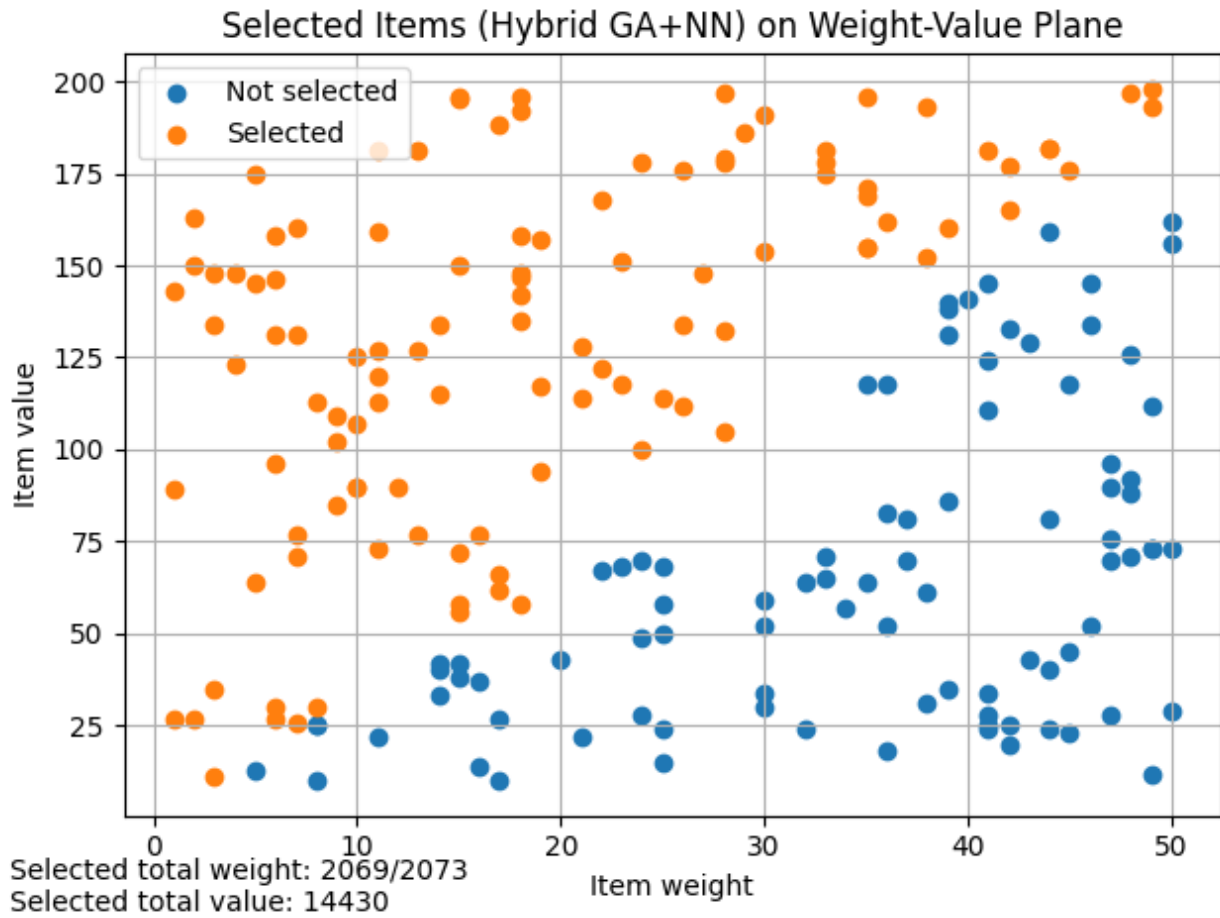


Στην περίπτωση μεγάλης κλίμακας προβλήματος με $N = 200$ αντικείμενα, παρουσιάζονται οι γραφικές απεικονίσεις των λύσεων που προέκυψαν από τον επιλύτη MILP και τη μέθοδο greedy. Η υψηλή πυκνότητα σημείων στον χώρο βάρους-αξίας αντικατοπτρίζει την αυξημένη πολυπλοκότητα του προβλήματος, ενώ η επιλογή αντικειμένων απεικονίζεται με τον ίδιο συνεπή τρόπο όπως και στα προηγούμενα μεγέθη. Οι συγκεκριμένες απεικονίσεις χρησιμοποιούνται ως σημείο αναφοράς για τη σύγκριση με τα αποτελέσματα της υβριδικής μεθόδου, διατηρώντας σταθερή την πειραματική διαδικασία.

Γράφημα 12: Αναπαράσταση των αντικειμένων στον χώρο βάρους-αξίας και της τελικής λύσης που προέκυψε από τη μέθοδο greedy για πρόβλημα σακιδίου με $N = 200$ αντικείμενα.

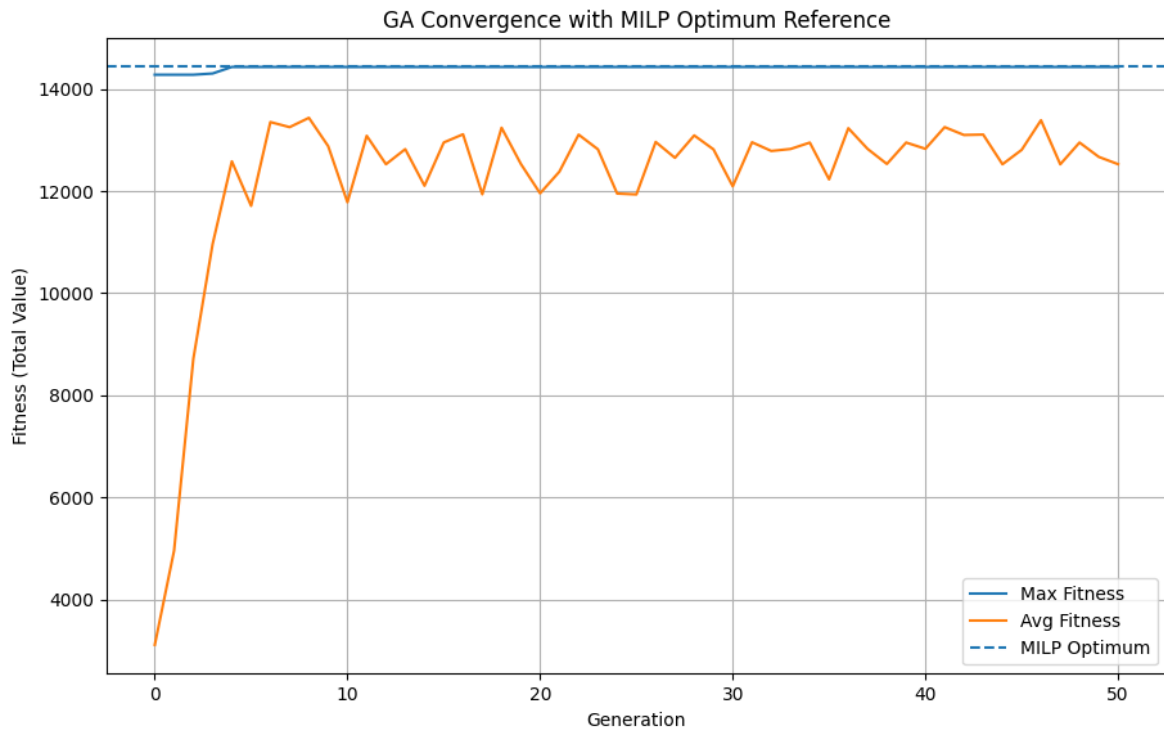


Γράφημα 13: Αναπαράσταση των αντικειμένων στον χώρο βάρους-αξίας και της τελικής λύσης που υπολογίστηκε από τον επιλύτη MILP για πρόβλημα σακιδίου με $N = 200$ αντικείμενα.



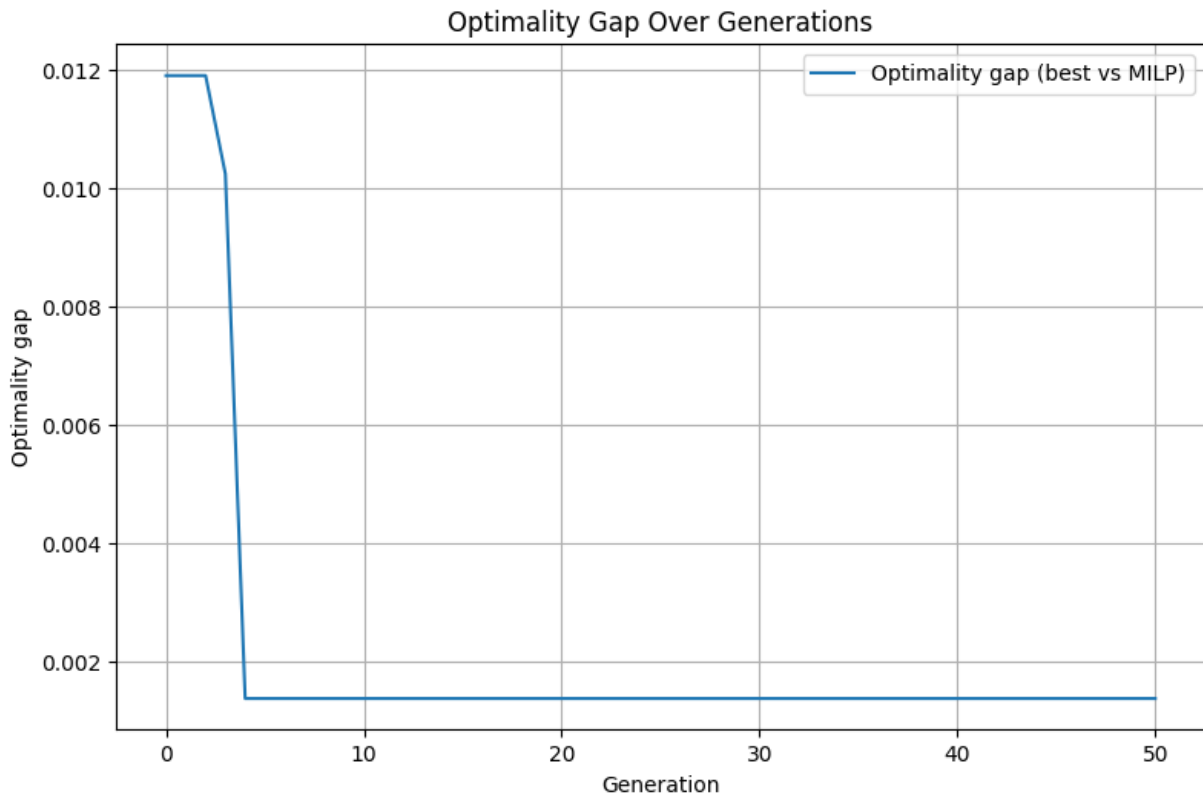
Στη συνέχεια, στο γράφημα 14 παρουσιάζεται το διάγραμμα σύγκλισης του Γενετικού Αλγορίθμου, στο οποίο απεικονίζεται η εξέλιξη της μέγιστης και της μέσης τιμής καταλληλότητας του πληθυσμού ανά γενιά. Στο ίδιο γράφημα περιλαμβάνεται και η τιμή της βέλτιστης λύσης που προκύπτει από τη μέθοδο MILP, ως σταθερή γραμμή αναφοράς, ώστε να είναι δυνατή η άμεση σύγκριση των αποτελεσμάτων του εξελικτικού αλγορίθμου με τη βέλτιστη γνωστή λύση.

Γράφημα 14: Διάγραμμα σύγκλισης του Γενετικού Αλγορίθμου για $N = 200$, με απεικόνιση της μέγιστης και μέσης καταλληλότητας και αναφορά στη βέλτιστη λύση MILP.



Τέλος, στο γράφημα 15 παρουσιάζεται το διάγραμμα εξέλιξης του ποσοστού απόκλισης από τη βέλτιστη λύση (optimality gap) ως συνάρτηση του αριθμού των γενεών. Το γράφημα αυτό αποτυπώνει τη μεταβολή της απόστασης της καλύτερης λύσης του υβριδικού αλγορίθμου από τη λύση MILP κατά τη διάρκεια της εξελικτικής διαδικασίας.

Γράφημα 15: Διάγραμμα εξέλιξης του ποσοστού απόκλισης από τη βέλτιστη λύση (optimality gap) για $N = 200$.



Στην παρούσα υποενότητα παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της προτεινόμενης υβριδικής μεθόδου σε πρόβλημα σακιδίου μεγάλης κλίμακας, με πλήθος αντικειμένων ίσο με $N = 200$. Όπως και στις προηγούμενες περιπτώσεις, τα δεδομένα δημιουργήθηκαν τυχαία, με ακέραιες τιμές βάρους και αξίας για κάθε αντικείμενο, ενώ η χωρητικότητα του σακιδίου ορίστηκε ως ποσοστό του συνολικού βάρους. Για λόγους σύγκρισης, υπολογίστηκε και η βέλτιστη λύση αναφοράς με χρήση επιλύτη μικτού ακέραιου γραμμικού προγραμματισμού (MILP).

Ο υβριδικός αλγόριθμος εκτελέστηκε πολλαπλές φορές (20 ανεξάρτητες εκτελέσεις), προκειμένου να εξαχθούν στατιστικά μεγέθη σχετικά με την απόδοσή του. Στην τελική λύση που παρουσιάζεται, η συνολική αξία που επιτεύχθηκε από τον υβριδικό αλγόριθμο ήταν 14430, με συνολικό βάρος 2069 επί μέγιστης χωρητικότητας 2073. Η αντίστοιχη βέλτιστη λύση MILP είχε συνολική αξία 14450, γεγονός που αντιστοιχεί σε optimality gap ίσο με 0.1384%.

Στον Πίνακα 3 συνοψίζονται τα αποτελέσματα από τις 20 εκτελέσεις του αλγορίθμου για $N = 200$. Παρατηρείται ότι ο μέσος όρος του optimality gap παραμένει χαμηλός (0.2062%), με μικρή τυπική

απόκλιση (0.1424%), γεγονός που υποδεικνύει σταθερή συμπεριφορά του αλγορίθμου ακόμη και σε προβλήματα μεγάλης κλίμακας.

Πίνακας 3 Στατιστικά αποτελέσματα υβριδικού αλγορίθμου για πρόβλημα σακιδίου με $N = 200$ (20 εκτελέσεις).

Πλήθος αντικειμένων	Αριθμός εκτελέσεων	Μέσο optimality gap (%)	Τυπική απόκλιση (%)
200	20	0.2062	0.1424

9.5 Συγκριτική ανάλυση αποτελεσμάτων ως προς το μέγεθος του προβλήματος

Στις Ενότητες 9.2, 9.3 και 9.4 παρουσιάστηκαν αναλυτικά τα αποτελέσματα της υβριδικής μεθόδου για τρία διαφορετικά μεγέθη προβλήματος, με $N = 10$, $N = 50$ και $N = 200$ αντικείμενα αντίστοιχα. Στην παρούσα ενότητα επιχειρείται η συγκριτική εξέταση των αποτελεσμάτων αυτών, με στόχο την ανάδειξη των διαφορών και των κοινών χαρακτηριστικών που παρατηρούνται καθώς το μέγεθος του προβλήματος αυξάνεται, τόσο σε επίπεδο επιμέρους εκτελέσεων όσο και σε επίπεδο στατιστικών μεγεθών.

Ως προς την τελική επιλογή αντικειμένων, τα διαγράμματα διασποράς βάρους–αξίας (Γραφήματα 1, 6 και 11) αποτυπώνουν τη λύση που παρήγαγε ο υβριδικός αλγόριθμος για ένα αντιπροσωπευτικό στιγμιότυπο κάθε μεγέθους προβλήματος. Και στις τρεις περιπτώσεις, τα επιλεγμένα αντικείμενα κατανέμονται σε όλο το εύρος τιμών βάρους και αξίας, ενώ όσο αυξάνεται το πλήθος των αντικειμένων, η πυκνότητα των σημείων αυξάνεται σημαντικά. Στα μικρά μεγέθη προβλήματος η οπτική ερμηνεία της λύσης είναι άμεση, ενώ για μεγαλύτερα μεγέθη η απεικόνιση λειτουργεί κυρίως ενδεικτικά και συμπληρώνεται από τα υπόλοιπα διαγράμματα απόδοσης.

Η εξελικτική πορεία του γενετικού αλγορίθμου συγκρίνεται μέσω των διαγραμμάτων σύγκλισης με αναφορά στη βέλτιστη λύση MILP (Γραφήματα 4, 9 και 14). Για $N = 10$ παρατηρείται ταχεία προσέγγιση της βέλτιστης τιμής αναφοράς, χωρίς πλήρη ταύτιση στο συγκεκριμένο στιγμιότυπο. Για $N = 50$, η μέγιστη τιμή καταλληλότητας προσεγγίζει τη λύση MILP σε μεγαλύτερο βαθμό, ενώ για $N = 200$ η σύγκλιση λαμβάνει χώρα σε υψηλές τιμές της αντικειμενικής συνάρτησης, με τη λύση MILP να λειτουργεί κυρίως ως σημείο αναφοράς για την τελική ποιότητα της λύσης.

Η συγκριτική εικόνα της απόδοσης της μεθόδου ως προς τη βέλτιστη λύση αποτυπώνεται πληρέστερα μέσω των διαγραμμάτων του optimality gap (Γραφήματα 5, 10 και 15), σε συνδυασμό με τα στατιστικά αποτελέσματα που παρουσιάζονται στους αντίστοιχους πίνακες των Ενότητων 9.2–9.4. Για $N = 10$ το χάσμα βελτιστότητας παραμένει μη μηδενικό στο τέλος της διαδικασίας, ενώ για $N = 50$ μηδενίζεται στις επαναλαμβανόμενες εκτελέσεις. Στην περίπτωση $N = 200$, το optimality gap διατηρείται σε χαμηλά επίπεδα κατά μέσο όρο, με μικρή διακύμανση μεταξύ εκτελέσεων, γεγονός που υποδεικνύει σταθερή συμπεριφορά της μεθόδου σε μεγαλύτερα προβλήματα.

Κεφάλαιο 10ο: Συζήτηση Αποτελεσμάτων

10.1 Ερμηνεία αποτελεσμάτων

Τα πειραματικά αποτελέσματα της παρούσας εργασίας επιτρέπουν τη συστηματική ερμηνεία της συμπεριφοράς του υβριδικού σχήματος NN+GA σε διαφορετικά μεγέθη προβλήματος και τη σύνδεσή τους με ευρύτερες τάσεις που έχουν καταγραφεί στη σύγχρονη βιβλιογραφία των μεταερευτικών και της μηχανικής μάθησης. Η ανάλυση δεν αποσκοπεί στη σύγκριση αλγορίθμων σε επίπεδο απόλυτης υπεροχής, αλλά στην κατανόηση του πώς και γιατί ο συνδυασμός μάθησης και εξελικτικής αναζήτησης επηρεάζει την ποιότητα των παραγόμενων λύσεων.

Για μικρά μεγέθη προβλήματος, όπως στην περίπτωση $N = 10$, ο γενετικός αλγόριθμος, ανεξάρτητα από την αρχικοποίηση, είναι σε θέση να εξερευνήσει αποτελεσματικά το μεγαλύτερο μέρος του χώρου λύσεων. Το γεγονός ότι ο υβριδικός αλγόριθμος συγκλίνει συχνά στη βέλτιστη λύση μπορεί να ερμηνευθεί ως συνέπεια της σχετικά χαμηλής συνδυαστικής πολυπλοκότητας, όπου η στοχαστική αναζήτηση επαρκεί για την επίτευξη πλήρους κάλυψης του χώρου. Η συμπεριφορά αυτή συμφωνεί με θεωρητικά και εμπειρικά αποτελέσματα της εξελικτικής υπολογιστικής, σύμφωνα με τα οποία για μικρού μεγέθους στιγμιότυπα η απόσταση μεταξύ τυχαίας και καθοδηγούμενης αναζήτησης είναι περιορισμένη (Doerr and Neumann, 2019).

Καθώς το μέγεθος του προβλήματος αυξάνεται ($N = 50$ και $N = 200$), παρατηρείται σαφής διαφοροποίηση. Ο χώρος λύσεων αυξάνεται εκθετικά και η πιθανότητα εντοπισμού της βέλτιστης λύσης μέσω καθαρά στοχαστικών μηχανισμών μειώνεται σημαντικά. Σε αυτό το πλαίσιο, η χρήση του νευρωνικού δικτύου ως μηχανισμού καθοδήγησης της αρχικοποίησης αποκτά ουσιαστικό ρόλο. Η βελτιωμένη ποιότητα των αρχικών λύσεων οδηγεί τον γενετικό αλγόριθμο σε περιοχές του χώρου λύσεων με υψηλότερη αναμενόμενη καταλληλότητα, γεγονός που αντανακλάται σε μικρότερα optimality gaps, ακόμη και όταν δεν επιτυγχάνεται η ακριβής βέλτιστη λύση.

Η εικόνα αυτή ενισχύεται περαιτέρω από τα στατιστικά αποτελέσματα που προέκυψαν από πολλαπλές ανεξάρτητες εκτελέσεις του αλγορίθμου. Για $N = 50$, ο μέσος όρος του optimality gap μηδενίζεται, με μηδενική τυπική απόκλιση, γεγονός που υποδηλώνει πλήρως σταθερή συμπεριφορά της μεθόδου στα εξεταζόμενα στιγμιότυπα. Αντίστοιχα, για $N = 200$, το μέσο optimality gap παραμένει σε πολύ χαμηλά επίπεδα, με περιορισμένη διακύμανση μεταξύ εκτελέσεων, στοιχείο που δείχνει ότι η υβριδική προσέγγιση διατηρεί προβλέψιμη και ελεγχόμενη απόδοση καθώς το πρόβλημα κλιμακώνεται.

Η συμπεριφορά αυτή είναι σύμφωνη με πρόσφατα ευρήματα που δείχνουν ότι η μηχανική μάθηση μπορεί να λειτουργήσει αποτελεσματικά ως υποστηρικτικός μηχανισμός σε μεταερευτικές μεθόδους, κυρίως μέσω της παροχής πληροφορίας για την αρχικοποίηση, την επιλογή ή την παραμετροποίηση, χωρίς να αντικαθιστά την ίδια τη διαδικασία αναζήτησης (Talbi, 2021; Karimi-Mamaghan et al., 2022). Ιδιαίτερα, η χρήση της μάθησης σε επίπεδο υψηλής αρχιτεκτονικής, όπως στην παρούσα εργασία, έχει αναγνωριστεί ως μία από τις πιο σταθερές και γενικεύσιμες μορφές υβριδισμού.

Η σταδιακή αύξηση του optimality gap με το μέγεθος του προβλήματος δεν αποτελεί ένδειξη αποτυχίας της μεθόδου, αλλά αναμενόμενο χαρακτηριστικό των στοχαστικών μεταερευτικών αλγορίθμων σε NP-hard προβλήματα. Θεωρητικές αναλύσεις της εξελικτικής υπολογιστικής επισημαίνουν ότι, καθώς το πρόβλημα κλιμακώνεται, η επίτευξη βελτιστότητας αντικαθίσταται από την επίτευξη λύσεων με ελεγχόμενη και προβλέψιμη απόκλιση από το optimum, εντός περιορισμένου υπολογιστικού προϋπολογισμού (Doerr and Neumann, 2019; Popovici, 2014). Υπό αυτό το πρίσμα, τα αποτελέσματα

για $N = 200$ καταδεικνύουν ότι το υβριδικό σχήμα διατηρεί σταθερή απόδοση, παρά τη σημαντική αύξηση της δυσκολίας.

Επιπλέον, η παρατηρούμενη συμπεριφορά της σύγκλισης του γενετικού αλγορίθμου συνδέεται άμεσα με ζητήματα παραμετροποίησης και ευαισθησίας των εξελικτικών τελεστών. Η βιβλιογραφία έχει δείξει ότι οι παράμετροι του GA επηρεάζουν έντονα τόσο την ταχύτητα σύγκλισης όσο και τη διακύμανση της ποιότητας των λύσεων (Eiben and Smit, 2011; Hassanat et al., 2019). Στο πλαίσιο της παρούσας εργασίας, η χρήση σταθερών παραμέτρων σε όλα τα μεγέθη προβλήματος επιτρέπει την καθαρότερη σύγκριση, αλλά ταυτόχρονα εξηγεί μέρος της παρατηρούμενης διαφοροποίησης της απόδοσης καθώς το Ναυξάνεται.

Τέλος, η σύγκριση με τη λύση αναφοράς μέσω MILP αναδεικνύει τον συμπληρωματικό ρόλο των ακριβών και προσεγγιστικών μεθόδων. Ενώ η MILP παρέχει εγγυημένη βελτιστότητα για μικρά και μεσαία στιγμιότυπα, το υπολογιστικό κόστος αυξάνεται ταχέως με το μέγεθος του προβλήματος. Αντιθέτως, ο υβριδικός NN+GA δεν προσφέρει θεωρητικές εγγυήσεις, αλλά παρουσιάζει σταθερή και προβλέψιμη συμπεριφορά, στοιχείο που ευθυγραμμίζεται με τη σύγχρονη τάση αξιοποίησης της μηχανικής μάθησης ως εργαλείου υποστήριξης ευρετικών και μεταερευτικών αλγορίθμων, και όχι ως υποκατάστατου των ακριβών μεθόδων (Lodi and Zarpellon, 2017; Talbi, 2021).

Η χρήση μέσων όρων και τυπικών αποκλίσεων επιτρέπει επίσης τη διάκριση μεταξύ μεμονωμένων εκτελέσεων και της γενικής συμπεριφοράς του αλγορίθμου. Παρότι τα επιμέρους διαγράμματα αποτυπώνουν συγκεκριμένα στιγμιότυπα, τα συνοπτικά στατιστικά μεγέθη επιβεβαιώνουν ότι τα παρατηρούμενα χαρακτηριστικά δεν αποτελούν τυχαία φαινόμενα, αλλά σταθερά μοτίβα της υβριδικής μεθόδου για τα εξεταζόμενα μεγέθη προβλήματος.

Τα διαγράμματα σύγκλισης επιβεβαιώνουν επίσης την ταχεία σταθεροποίηση της μέγιστης καταλληλότητας, ιδιαίτερα για τα μικρά μεγέθη προβλήματος. Η παρατηρούμενη πρόωμη σύγκλιση του γενετικού αλγορίθμου αποτελεί αναμενόμενο φαινόμενο, όταν ο χώρος λύσεων είναι περιορισμένος και η παγκόσμια βέλτιστη ή μία ισοδύναμη σχεδόν βέλτιστη λύση εντοπίζεται σε πρώιμα στάδια της εξελικτικής διαδικασίας. Στις περιπτώσεις αυτές, η περαιτέρω αύξηση του αριθμού των γενεών δεν οδηγεί σε ουσιαστική βελτίωση, καθώς ο πληθυσμός έχει ήδη συγκεντρωθεί γύρω από λύσεις υψηλής ποιότητας, γεγονός που συνάδει με θεωρητικά αποτελέσματα της εξελικτικής υπολογιστικής (Doerr and Neumann, 2019).

10.2 Επίτευξη βέλτιστης λύσης σε προβλήματα μικρής κλίμακας

Για μικρά μεγέθη προβλήματος, όπως στην περίπτωση $N = 10$, η επίτευξη της βέλτιστης λύσης από τον υβριδικό αλγόριθμο NN+GA είναι αναμενόμενη και μπορεί να ερμηνευθεί κυρίως με όρους συνδυαστικής πολυπλοκότητας και κάλυψης του χώρου λύσεων. Ο αριθμός των εφικτών δυαδικών λύσεων παραμένει σχετικά περιορισμένος, γεγονός που επιτρέπει στον γενετικό αλγόριθμο να διερευνήσει αποτελεσματικά μεγάλο μέρος του χώρου ακόμη και με πεπερασμένο πληθυσμό και αριθμό γενεών. Σε αυτό το καθεστώς, η στοχαστική φύση της εξελικτικής αναζήτησης δεν λειτουργεί ως περιορισμός, αλλά ως μηχανισμός ταχείας σύγκλισης προς την παγκόσμια βέλτιστη λύση.

Επιπλέον, για μικρά N , η επίδραση της αρχικοποίησης είναι λιγότερο κρίσιμη, καθώς ακόμη και τυχαία παραγόμενες λύσεις έχουν σχετικά υψηλή πιθανότητα να βρίσκονται κοντά στο optimum. Η χρήση του νευρωνικού δικτύου ως μηχανισμού καθοδήγησης ενισχύει περαιτέρω αυτή τη διαδικασία, αλλά δεν αποτελεί τον καθοριστικό παράγοντα επιτυχίας. Η παρατήρηση αυτή συμφωνεί με θεωρητικά αποτελέσματα της εξελικτικής υπολογιστικής, σύμφωνα με τα οποία για προβλήματα μικρής κλίμακας

η διαφορά μεταξύ καθοδηγούμενης και μη καθοδηγούμενης αναζήτησης είναι περιορισμένη (Doerg and Neumann, 2019).

Τέλος, η ομαλή μορφή του τοπίου καταλληλότητας για μικρά στιγμιότυπα του προβλήματος του σακιδίου μειώνει την πιθανότητα εγκλωβισμού σε τοπικά άριστα. Ως αποτέλεσμα, ο γενετικός αλγόριθμος μπορεί να επιτύχει πλήρη σύγκλιση χωρίς να απαιτούνται εξελιγμένες στρατηγικές παραμετροποίησης ή προσαρμογής, στοιχείο που εξηγεί τη συχνή ταύτιση της τελικής λύσης με τη λύση αναφοράς που προκύπτει από τη MILP.

10.3 Συμπεριφορά προσεγγιστικής βελτιστοποίησης σε προβλήματα μεγάλης κλίμακας

Καθώς το μέγεθος του προβλήματος αυξάνεται, ο χώρος λύσεων μεγαλώνει εκθετικά και η πλήρης διερεύνησή του καθίσταται πρακτικά αδύνατη για στοχαστικές μεθόδους με περιορισμένο υπολογιστικό προϋπολογισμό. Στις περιπτώσεις $N = 50$ και $N = 200$, ο γενετικός αλγόριθμος δεν αναμένεται να εντοπίσει συστηματικά τη βέλτιστη λύση, ακόμη και όταν ενισχύεται από μηχανισμούς μάθησης. Αντίθετα, η απόδοσή του αξιολογείται με βάση την ικανότητά του να προσεγγίζει το optimum με ελεγχόμενη απόκλιση.

Ο ρόλος του νευρωνικού δικτύου καθίσταται ιδιαίτερα σημαντικός σε αυτό το καθεστώς. Μέσω της καθοδηγούμενης αρχικοποίησης, το NN μεταφέρει δομική πληροφορία που έχει εξαχθεί από δεδομένα εκπαίδευσης, οδηγώντας τον γενετικό αλγόριθμο σε υποπεριοχές του χώρου λύσεων με αυξημένη αναμενόμενη ποιότητα. Η επίδραση αυτή δεν εγγυάται βελτιστότητα, αλλά μειώνει συστηματικά την απόσταση από τη βέλτιστη λύση, γεγονός που αντικατοπτρίζεται σε μικρότερα optimality gaps σε σύγκριση με καθαρά τυχαία αρχικοποίηση (Talbi, 2021; Karimi-Mamaghan et al., 2022).

Η ύπαρξη μη μηδενικού gap εξηγείται επίσης από τη στοχαστική φύση του γενετικού αλγορίθμου και από τη χρήση σταθερών παραμέτρων σε όλα τα μεγέθη προβλήματος. Η βιβλιογραφία έχει δείξει ότι η βέλτιστη παραμετροποίηση ενός GA εξαρτάται από τη διάσταση και τη δομή του προβλήματος, και ότι η μη προσαρμοστική ρύθμιση παραμέτρων οδηγεί συχνά σε συμβιβασμούς μεταξύ ταχύτητας σύγκλισης και ποιότητας λύσης (Eiben and Smit, 2011; Hassanat et al., 2019). Υπό αυτό το πρίσμα, η διατήρηση μικρού αλλά σταθερού optimality gap για μεγάλα N αποτελεί ένδειξη ανθεκτικότητας της μεθόδου και όχι αδυναμία.

Η εξέλιξη του optimality gap ως συνάρτηση των γενεών παρουσιάζει χαρακτηριστική μορφή ταχείας αρχικής μείωσης, ακολουθούμενη από σχεδόν επίπεδη συμπεριφορά. Το μοτίβο αυτό υποδηλώνει ότι το μεγαλύτερο μέρος της βελτίωσης επιτυγχάνεται στα πρώτα στάδια της εξελικτικής διαδικασίας, ενώ οι επόμενες γενιές συμβάλλουν κυρίως στη διατήρηση της ποιότητας της λύσης και όχι σε συστηματική περαιτέρω προσέγγιση του optimum. Η συμπεριφορά αυτή είναι ευρέως καταγεγραμμένη στη βιβλιογραφία των γενετικών αλγορίθμων και αντανακλά τη στοχαστική φύση της αναζήτησης και τη φθίνουσα απόδοση της επιπλέον υπολογιστικής προσπάθειας σε προβλήματα μεγάλης κλίμακας (Eiben and Smit, 2011; Talbi, 2021).

10.4 Πλεονεκτήματα και περιορισμοί της υβριδικής προσέγγισης NN + GA

Η υβριδική μέθοδος NN + GA που μελετάται στην παρούσα εργασία παρουσιάζει σαφή πλεονεκτήματα, τα οποία προκύπτουν κυρίως από τη συμπληρωματική αξιοποίηση της μηχανικής μάθησης και της εξελικτικής αναζήτησης. Το βασικό πλεονέκτημα αφορά τη βελτίωση της ποιότητας των αρχικών λύσεων μέσω της καθοδηγούμενης αρχικοποίησης. Η χρήση του νευρωνικού δικτύου επιτρέπει την ενσωμάτωση εμπειρικής πληροφορίας που έχει εξαχθεί από δεδομένα εκπαίδευσης, οδηγώντας τον γενετικό αλγόριθμο σε περιοχές του χώρου λύσεων με αυξημένη αναμενόμενη καταλληλότητα. Η

στρατηγική αυτή έχει αναγνωρισθεί στη σύγχρονη βιβλιογραφία ως μία από τις πιο σταθερές και γενικεύσιμες μορφές υβριδισμού, ιδίως όταν το μοντέλο μάθησης λειτουργεί ως guide και όχι ως υποκατάστατο της διαδικασίας αναζήτησης (Talbi, 2021; Karimi-Mamaghan et al., 2022).

Ένα δεύτερο πλεονέκτημα σχετίζεται με τη συμπεριφορά κλιμάκωσης της μεθόδου. Παρότι η επίτευξη της ακριβούς βέλτιστης λύσης καθίσταται ολοένα και δυσκολότερη για μεγάλα μεγέθη προβλήματος, το υβριδικό σχήμα διατηρεί μικρά και ελεγχόμενα optimality gaps, γεγονός που υποδηλώνει ανθεκτικότητα έναντι της εκθετικής αύξησης του χώρου λύσεων. Η συμπεριφορά αυτή συνάδει με θεωρητικά αποτελέσματα της εξελικτικής υπολογιστικής, σύμφωνα με τα οποία η αξία των καθοδηγούμενων μεταερευτικών μεθόδων αναδεικνύεται κυρίως σε προβλήματα μεγάλης κλίμακας, όπου η πλήρης διερεύνηση είναι πρακτικά ανέφικτη (Doerr and Neumann, 2019).

Επιπλέον, η αρχιτεκτονική υψηλού επιπέδου που υιοθετείται εξασφαλίζει μεθοδολογική καθαρότητα και ερμηνευσιμότητα. Ο σαφής διαχωρισμός ρόλων μεταξύ νευρωνικού δικτύου και γενετικού αλγορίθμου επιτρέπει την απομόνωση της επίδρασης κάθε συνιστώσας και διευκολύνει τη συστηματική ανάλυση της συμπεριφοράς του υβριδικού σχήματος. Σε αντίθεση με πιο στενά ενοποιημένες προσεγγίσεις, όπου η μάθηση παρεμβαίνει δυναμικά στους τελεστές του GA, η παρούσα επιλογή μειώνει την πολυπλοκότητα και περιορίζει τον κίνδυνο ανεξέλεγκτης μεροληψίας της αναζήτησης (Talbi, 2021).

Παρά τα πλεονεκτήματα αυτά, η μέθοδος παρουσιάζει και σαφείς περιορισμούς. Πρωτίστως, η απουσία θεωρητικών εγγυήσεων βελτιστότητας αποτελεί εγγενές χαρακτηριστικό τόσο των γενετικών αλγορίθμων όσο και των υβριδικών τους επεκτάσεων. Αν και η χρήση της MILP ως λύσης αναφοράς επιτρέπει την ποσοτικοποίηση της απόκλισης από το optimum, η ίδια η υβριδική μέθοδος δεν μπορεί να προσφέρει αποδείξεις σύγκλισης ή φραγμούς σφάλματος, στοιχείο που περιορίζει την εφαρμογή της σε περιβάλλοντα όπου απαιτείται αυστηρή βελτιστότητα.

Ένας δεύτερος περιορισμός αφορά την εξάρτηση της απόδοσης από την παραμετροποίηση. Η επιλογή παραμέτρων του γενετικού αλγορίθμου, όπως το μέγεθος πληθυσμού και τα ποσοστά ανασυνδυασμού και μετάλλαξης, επηρεάζει άμεσα τόσο τη σύγκλιση όσο και τη διακύμανση των αποτελεσμάτων. Η χρήση σταθερών παραμέτρων σε όλα τα μεγέθη προβλήματος, αν και διευκολύνει τη συγκριτική ανάλυση, δεν είναι απαραίτητα βέλτιστη και ενδέχεται να περιορίζει την απόδοση για μεγάλα στιγμιότυπα, όπως έχει επισημανθεί στη σχετική βιβλιογραφία (Eiben and Smit, 2011; Hassanat et al., 2019).

Τέλος, η αποτελεσματικότητα του νευρωνικού δικτύου εξαρτάται από την ποιότητα και την αντιπροσωπευτικότητα των δεδομένων εκπαίδευσης. Εφόσον το δίκτυο εκπαιδεύεται σε συνθετικά στιγμιότυπα περιορισμένου εύρους, η ικανότητά του να γενικεύει σε διαφορετικές κατανομές προβλημάτων ενδέχεται να είναι περιορισμένη. Η παρατήρηση αυτή συνάδει με ευρύτερα ευρήματα της βιβλιογραφίας, σύμφωνα με τα οποία η μηχανική μάθηση ενισχύει τις μεταερευτικές μεθόδους όταν υπάρχει επαρκής δομική ομοιογένεια μεταξύ εκπαίδευσης και εφαρμογής, αλλά δεν υποκαθιστά τη στοχαστική εξερεύνηση σε ετερογενή ή απρόβλεπτα περιβάλλοντα (Karimi-Mamaghan et al., 2022).

Τα διαγράμματα διασποράς βάρους–αξίας παρέχουν συμπληρωματική ποιοτική πληροφόρηση σχετικά με τη δομή των λύσεων που παράγονται από το υβριδικό σχήμα. Για μικρά και μεσαία μεγέθη προβλήματος, τα επιλεγμένα αντικείμενα εμφανίζουν κατά κανόνα ευνοϊκούς λόγους αξίας προς βάρος, οδηγώντας σε λύσεις που αξιοποιούν σχεδόν πλήρως τη διαθέσιμη χωρητικότητα του σακιδίου. Αντιθέτως, για μεγάλα μεγέθη προβλήματος, το πρότυπο επιλογής καθίσταται περισσότερο διάσπαρτο, αντανακλώντας την αυξημένη συνδυαστική πολυπλοκότητα και την ύπαρξη πολλαπλών

ανταγωνιστικών συμβιβασμών. Η παρατήρηση αυτή ενισχύει την ερμηνεία ότι το υβριδικό NN+GA συλλαμβάνει βασικές δομικές ιδιότητες λύσεων υψηλής ποιότητας, ακόμη και όταν η πλήρης βελτιστότητα δεν είναι εφικτή.

Κεφάλαιο 11ο: Συμπεράσματα & Μελλοντική Εργασία

Η παρούσα εργασία μελέτησε το πρόβλημα του σακιδίου 0–1 μέσω μιας υβριδικής προσεγγιστικής μεθόδου που συνδυάζει ένα πολυεπίπεδο νευρωνικό δίκτυο (MLP) με έναν γενετικό αλγόριθμο (GA). Ο στόχος δεν ήταν η εισαγωγή νέου θεωρητικού αλγορίθμου, αλλά η εμπειρική διερεύνηση της συμπεριφοράς ενός υβριδικού σχήματος μάθησης–εξελικτικής αναζήτησης, η αξιολόγηση της κλιμάκωσής του ως προς το μέγεθος του προβλήματος και η ποσοτικοποίηση της απόκλισής του από τη βέλτιστη λύση. Στο πλαίσιο αυτό, η MILP χρησιμοποιήθηκε ως ακριβής λύση αναφοράς, επιτρέποντας τη συστηματική σύγκριση και την ερμηνεία των αποτελεσμάτων.

Η υλοποίηση κάλυψε ολόκληρη την πειραματική αλυσίδα: δημιουργία συνθετικών στιγμιότυπων διαφορετικών μεγεθών, υπολογισμό της βέλτιστης λύσης αναφοράς, εκπαίδευση του νευρωνικού δικτύου, υβριδική αρχικοποίηση του πληθυσμού του γενετικού αλγορίθμου, εκτέλεση της εξελικτικής διαδικασίας και καταγραφή δεικτών απόδοσης. Η ολοκληρωμένη αυτή διαδικασία επέτρεψε την απομόνωση του ρόλου κάθε συνιστώσας και τη σαφή αξιολόγηση της συμβολής της μηχανικής μάθησης στο συνολικό σχήμα βελτιστοποίησης.

Τα πειραματικά αποτελέσματα καταδεικνύουν ότι το υβριδικό σχήμα NN+GA εμφανίζει σταθερή και προβλέψιμη συμπεριφορά σε όλα τα εξεταζόμενα μεγέθη προβλήματος. Για μικρά στιγμιότυπα, η επίτευξη της βέλτιστης λύσης είναι συχνή και συνοδεύεται από ταχεία σύγκλιση, γεγονός που αντανακλά τον περιορισμένο χώρο λύσεων και την επάρκεια της στοχαστικής αναζήτησης. Σε αυτά τα μεγέθη, η συνεισφορά του νευρωνικού δικτύου λειτουργεί κυρίως ενισχυτικά, χωρίς να αποτελεί τον καθοριστικό παράγοντα επιτυχίας.

Για μεσαία και μεγάλα μεγέθη προβλήματος, τα αποτελέσματα δείχνουν σαφή μετατόπιση από τη βελτιστότητα προς την προσεγγιστική βελτιστότητα. Η χρήση του νευρωνικού δικτύου ως μηχανισμού καθοδήγησης της αρχικοποίησης οδηγεί σε λύσεις υψηλής ποιότητας ήδη από τα πρώτα στάδια της εξελικτικής διαδικασίας, γεγονός που αντικατοπτρίζεται σε ταχεία μείωση του optimality gap. Παρά τη μη επίτευξη της ακριβούς βέλτιστης λύσης σε όλα τα μεγάλα στιγμιότυπα, η απόκλιση παραμένει μικρή και σταθερή, στοιχείο που υποδηλώνει ανθεκτικότητα της μεθόδου ως προς την κλιμάκωση.

Ιδιαίτερη σημασία έχει το γεγονός ότι τα παρατηρούμενα μοτίβα σύγκλισης και οι καμπύλες optimality gap ευθυγραμμίζονται με θεωρητικά και εμπειρικά ευρήματα της σύγχρονης βιβλιογραφίας. Η ταχεία αρχική βελτίωση και η επακόλουθη σταθεροποίηση της ποιότητας της λύσης υποδηλώνουν ότι η κύρια συνεισφορά της υβριδικής προσέγγισης εντοπίζεται στην αποτελεσματική καθοδήγηση της αναζήτησης προς υποπεριοχές υψηλής ποιότητας, παρά στην εξαντλητική διερεύνηση του χώρου λύσεων. Η συμπεριφορά αυτή ενισχύει τη θέση ότι η μηχανική μάθηση λειτουργεί αποτελεσματικά ως υποστηρικτικός μηχανισμός στις μεταερευνητικές μεθόδους, χωρίς να αντικαθιστά τη στοχαστική εξελικτική διαδικασία.

Κεφάλαιο 12ο: Βιβλιογραφία

- [1] B. Korte and J. Vygen, *Combinatorial Optimization: Theory and Algorithms*, 3rd ed. Berlin, Heidelberg: Springer, 2006.
- [2] C. M. Bishop, *Pattern Recognition and Machine Learning*. New York, NY: Springer, 2006.
- [3] C. Blum and A. Roli, “Metaheuristics in combinatorial optimization: Overview and conceptual comparison,” *ACM Computing Surveys*, vol. 35, no. 3, pp. 268–308, 2003, doi:10.1145/937503.937505.
- [4] C. Blum, J. Puchinger, G. R. Raidl, and A. Roli, “Hybrid metaheuristics in combinatorial optimization: A survey,” *Applied Soft Computing*, vol. 11, no. 6, pp. 4135–4151, 2011, doi:10.1016/j.asoc.2011.02.032.
- [5] I. Boussaïd, J. Lepagnot, and P. Siarry, “A survey on optimization metaheuristics,” *Information Sciences*, vol. 237, pp. 82–117, 2013, doi:10.1016/j.ins.2013.02.041.
- [6] T. H. Cormen, C. E. Leiserson, R. L. Rivest, and C. Stein, *Introduction to Algorithms*, 4th ed. Cambridge, MA: MIT Press, 2022.
- [7] B. Doerr and F. Neumann, *Theory of Evolutionary Computation: Recent Developments in Discrete Optimization*. Berlin: Springer, 2020. [Online]. Available: <https://www.lix.polytechnique.fr/Labo/Benjamin.Doerr/>
- [8] A. E. Eiben and S. K. Smit, “Parameter tuning for configuring and analyzing evolutionary algorithms,” *Swarm and Evolutionary Computation*, vol. 1, no. 1, pp. 19–31, 2011, doi:10.1016/j.swevo.2011.02.001.
- [9] A. E. Eiben, *Introduction to Evolutionary Computing*. Berlin: Springer, 2016.
- [10] E. Aarts and J. Korst, *Simulated Annealing and Boltzmann Machines*. New York, NY: John Wiley & Sons, 1989.
- [11] M. R. Garey and D. S. Johnson, *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*. New York, NY: W. H. Freeman, 2003.
- [12] D. E. Goldberg, *Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning*. Reading, MA: Addison-Wesley, 1989.
- [13] A. Hassanat et al., “Choosing mutation and crossover ratios for genetic algorithms—A review with a new dynamic approach,” *Information*, vol. 10, no. 12, p. 390, 2019, doi:10.3390/info10120390.
- [14] S. Haykin, *Neural Networks and Learning Machines*. Upper Saddle River, NJ: Pearson, 2016.
- [15] J. J. Hopfield and D. W. Tank, “Neural computation of decisions in optimization problems,” *Biological Cybernetics*, vol. 52, pp. 141–152, 1985, doi:10.1007/BF00339943.
- [16] E. R. Hruschka, R. J. Campello, A. A. Freitas, and A. C. P. L. F. de Carvalho, “A survey of evolutionary algorithms for clustering,” *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part C*, vol. 39, no. 2, pp. 133–155, 2009, doi:10.1109/TSMCC.2008.2007252.
- [17] M. Karimi-Mamaghan et al., “Machine learning at the service of metaheuristics for solving combinatorial optimization problems: A state of the art,” *European Journal of Operational Research*, vol. 296, no. 2, pp. 393–422, 2022, doi:10.1016/j.ejor.2021.04.032.

- [18] K. Kim and I. Han, "Genetic algorithms approach to feature discretization in artificial neural networks for the prediction of stock price index," *Expert Systems with Applications*, vol. 19, no. 2, pp. 125–132, 2000, doi:10.1016/S0957-4174(00)00027-0.
- [19] A. Lodi and G. Zarpellon, "On learning and branching: A survey," *TOP*, vol. 25, pp. 1–30, 2017, doi:10.1007/s11750-017-0451-6.
- [20] Z. Michalewicz and M. Schoenauer, "Evolutionary algorithms for constrained parameter optimization problems," *Evolutionary Computation*, vol. 4, no. 1, pp. 1–32, 1996.
- [21] M. Mitchell, *An Introduction to Genetic Algorithms*. Cambridge, MA: MIT Press, 1998.
- [22] C. H. Papadimitriou and K. Steiglitz, *Combinatorial Optimization: Algorithms and Complexity*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1998.
- [23] E. Popovici, "Theory of randomized search heuristics: Foundations and recent developments," *Genetic Programming and Evolvable Machines*, vol. 15, 2014, doi:10.1007/s10710-013-9208-7.
- [24] G. R. Raidl and J. Puchinger, "Combining (integer) linear programming techniques and metaheuristics for combinatorial optimization," in *Studies in Computational Intelligence*, Springer, 2008, pp. 31–62, doi:10.1007/978-3-540-78295-7_2.
- [25] S. Martello and P. Toth, *Knapsack Problems: Algorithms and Computer Implementations*. Chichester, UK: John Wiley & Sons, 1990.
- [26] K. Smith-Miles, "Neural networks for combinatorial optimization: A review," *INFORMS Journal on Computing*, vol. 11, no. 1, pp. 15–34, 1999, doi:10.1287/ijoc.11.1.15.
- [27] P. Stodola and R. Šćurek, "Using machine learning in combinatorial optimization: Extraction of graph features for the travelling salesman problem," *Knowledge-Based Systems*, vol. 314, p. 113216, 2025, doi:10.1016/j.knosys.2025.113216.
- [28] E. Talbi, "A taxonomy of hybrid metaheuristics," *Journal of Heuristics*, vol. 8, pp. 541–564, 2002, doi:10.1023/A:1016540724870.
- [29] E. Talbi, "Machine learning into metaheuristics: A survey and taxonomy," *ACM Computing Surveys*, vol. 54, no. 5, pp. 1–32, 2021, doi:10.1145/3459664.
- [30] A. Telikani, A. Tahmassebi, and A. H. Gandomi, "Evolutionary machine learning: A survey," *ACM Computing Surveys*, vol. 54, no. 8, pp. 1–35, 2021, doi:10.1145/3467477.
- [31] D. Whitley, T. Starkweather, and C. Bogart, "Genetic algorithms and neural networks: Optimizing connections and connectivity," *Parallel Computing*, vol. 14, no. 3, pp. 347–361, 1990, doi:10.1016/0167-8191(90)90086-O.
- [32] R. R. Afshar, Y. Zhang, M. Firat, and U. Kaymak, "A state aggregation approach for solving knapsack problem with deep reinforcement learning," *arXiv preprint arXiv:2004.12117*, 2020, doi:10.48550/arXiv.2004.12117.
- [33] D. Angioni, C. Archetti, and S. M. Grazia, "Neural combinatorial optimization: A tutorial," *Computers & Operations Research*, vol. 182, p. 107102, 2025, doi:10.1016/j.cor.2025.107102.
- [34] I. Bello, H. Pham, Q. V. Le, M. Norouzi, and S. Bengio, "Neural combinatorial optimization with reinforcement learning," *arXiv preprint arXiv:1611.09940*, 2016. [Online]. Available: <http://arxiv.org/abs/1611.09940v3>

[35] Y. Feng, T. Hu, X. Chen, and G. Wang, “Recent advances in knapsack problem: A comprehensive review of models, algorithms, and applications,” *Neurocomputing*, vol. 666, p. 132135, 2026, doi:10.1016/j.neucom.2025.132135.

[36] C. Hertrich and M. Skutella, “Provably good solutions to the knapsack problem via neural networks of bounded size,” *arXiv preprint arXiv:2005.14105*, 2020, doi:10.48550/arXiv.2005.14105.

Κεφάλαιο 13ο: Παράρτημα

Η υλοποίηση πραγματοποιήθηκε στη γλώσσα προγραμματισμού Python και περιλαμβάνει όλες τις ακόλουθες συνιστώσες: τη δημιουργία τυχαίων στιγμιότυπων του προβλήματος, τον υπολογισμό της βέλτιστης λύσης αναφοράς μέσω μικτού ακέραιου γραμμικού προγραμματισμού (MILP), την εκπαίδευση και χρήση πολυεπίπεδου νευρωνικού δικτύου για καθοδηγούμενη αρχικοποίηση, καθώς και την εκτέλεση του γενετικού αλγορίθμου και την καταγραφή των μετρικών απόδοσης.

```
import random
import time
import numpy as np

from deap import base, creator, tools

# =====
# 1) MENU
# =====
print("Select number of items:")
print("1 - 5 items")
print("2 - 10 items")
print("3 - 20 items")
print("4 - 50 items")
print("5 - 100 items")
print("6 - 200 items")

option = int(input("Option: "))

if option == 1:
    N_ITEMS = 5
elif option == 2:
    N_ITEMS = 10
elif option == 3:
    N_ITEMS = 20
elif option == 4:
    N_ITEMS = 50
```

```

elif option == 5:
    N_ITEMS = 100
elif option == 6:
    N_ITEMS = 200
else:
    raise SystemExit("Invalid choice.")

# =====
# 2) INSTANCE GENERATION
# =====
SEED = 42
random.seed(SEED)
np.random.seed(SEED)

weights = [random.randint(1, 50) for _ in range(N_ITEMS)]
values = [random.randint(10, 200) for _ in range(N_ITEMS)]
capacity = int(sum(weights) * 0.4) # 40% of total weight

print(f"\nGenerated {N_ITEMS} items.")
print(f"Knapsack capacity = {capacity}\n")

# =====
# 3) HELPERS (FEASIBILITY + BASELINES)
# =====
def solution_weight(mask, weights_):
    return int(sum(w * x for w, x in zip(weights_, mask)))

def solution_value(mask, values_):
    return int(sum(v * x for v, x in zip(values_, mask)))

def repair_to_capacity(mask, weights_, values_, capacity_):
    """
    Ensure feasibility by dropping items until total weight <= capacity.

```

Drop lowest value/weight ratio first.

```
"""
```

```
mask = list(mask)
```

```
chosen = [i for i, x in enumerate(mask) if x == 1]
```

```
total_w = sum(weights_[i] for i in chosen)
```

```
if total_w <= capacity_:
```

```
    return mask
```

```
# Drop worst ratio first
```

```
chosen_sorted = sorted(chosen, key=lambda i: (values_[i] / weights_[i]))
```

```
for i in chosen_sorted:
```

```
    mask[i] = 0
```

```
    total_w -= weights_[i]
```

```
    if total_w <= capacity_:
```

```
        break
```

```
return mask
```

```
def greedy_mask(weights_, values_, capacity_):
```

```
    """Classic greedy heuristic: sort by v/w, pack while possible."""
```

```
    idx = list(range(len(weights_)))
```

```
    idx.sort(key=lambda i: values_[i] / weights_[i], reverse=True)
```

```
    mask = [0] * len(weights_)
```

```
    total_w = 0
```

```
    for i in idx:
```

```
        if total_w + weights_[i] <= capacity_:
```

```
            mask[i] = 1
```

```
            total_w += weights_[i]
```

```
    return mask
```

```
# =====
```

```
# 4) MILP OPTIMUM (PuLP + CBC)
```

```
# =====
```

```
def solve_milp_knapsack(weights_, values_, capacity_, time_limit_sec=None):
```

```
"""
```

0-1 Knapsack MILP:

```
    maximize sum(v_i x_i)
```

```
    s.t.    sum(w_i x_i) <= capacity
```

```
           x_i in {0,1}
```

Returns: (mask, value, weight, elapsed_seconds, status_str)

```
"""
```

```
import pulp
```

```
n = len(weights_)
```

```
model = pulp.LpProblem("knapsack_01", pulp.LpMaximize)
```

```
x = [pulp.LpVariable(f"x_{i}", cat=pulp.LpBinary) for i in range(n)]
```

```
model += pulp.lpSum(values_[i] * x[i] for i in range(n))
```

```
model += pulp.lpSum(weights_[i] * x[i] for i in range(n)) <= capacity_
```

```
solver = pulp.PULP_CBC_CMD(msg=False, timeLimit=time_limit_sec)
```

```
t0 = time.perf_counter()
```

```
status = model.solve(solver)
```

```
elapsed = time.perf_counter() - t0
```

```
status_str = pulp.LpStatus[status]
```

```
mask = [int(pulp.value(x[i]) > 0.5) for i in range(n)]
```

```
total_w = sum(weights_[i] * mask[i] for i in range(n))
```

```
total_v = sum(values_[i] * mask[i] for i in range(n))
```

```
return mask, int(total_v), int(total_w), elapsed, status_str
```

```
# =====
```

```
# 5) NN DATA + MODEL (Keras)
```

```
# =====
```

```
from tensorflow.keras.models import Sequential
```

```
from tensorflow.keras.layers import Dense, Flatten
```

```

def build_model(n_items):
    model = Sequential(
        [
            Flatten(input_shape=(n_items, 2)),
            Dense(128, activation="relu"),
            Dense(64, activation="relu"),
            Dense(n_items, activation="sigmoid"),
        ]
    )
    model.compile(optimizer="adam", loss="binary_crossentropy")
    return model

def generate_training_data_same_instance(weights_, values_, capacity_, samples=2000):
    """
    Demo-first but meaningful:
    - Features are constant per item: [w/C, v/max(v)] for this instance
    - Labels come from a greedy baseline (learnable heuristic)
    """
    maxv = max(values_)
    feat = [[w / capacity_, v / maxv] for w, v in zip(weights_, values_)]
    label = greedy_mask(weights_, values_, capacity_)

    X = np.array([feat for _ in range(samples)], dtype=np.float32)
    y = np.array([label for _ in range(samples)], dtype=np.float32)
    return X, y

# =====
# 6) GA SETUP (DEAP)
# =====
# Guard against duplicate creator errors (important when rerunning in IDE)
if "Fitness" not in creator.__dict__:
    creator.create("Fitness", base.Fitness, weights=(1.0,)) # maximize

```

```

if "Individual" not in creator.__dict__:
    creator.create("Individual", list, fitness=creator.Fitness)

toolbox = base.Toolbox()
toolbox.register("attr_bool", random.randint, 0, 1)
toolbox.register("individual", tools.initRepeat, creator.Individual, toolbox.attr_bool, N_ITEMS)
toolbox.register("population", tools.initRepeat, list, toolbox.individual)

def eval_knapsack(individual):
    w = sum(wi * xi for wi, xi in zip(weights, individual))
    if w > capacity:
        return (0.0,)
    v = sum(vi * xi for vi, xi in zip(values, individual))
    return (float(v),)

toolbox.register("evaluate", eval_knapsack)
toolbox.register("mate", tools.cxTwoPoint)
toolbox.register("mutate", tools.mutFlipBit, indpb=0.02)
toolbox.register("select", tools.selTournament, tournsize=3)

# =====
# 7) Scatter Plot
# =====

import matplotlib.pyplot as plt

def plot_items_scatter(weights, values, mask, capacity, title="Items (Weight vs Value)":
    weights = np.array(weights)
    values = np.array(values)
    mask = np.array(mask)

    total_w = int(np.sum(weights * mask))
    total_v = int(np.sum(values * mask))

```

```

sel = mask == 1
n.sel = mask == 0

plt.figure()
plt.scatter(weights[n.sel], values[n.sel], label="Not selected")
plt.scatter(weights[sel], values[sel], label="Selected")

plt.xlabel("Item weight")
plt.ylabel("Item value")
plt.title(title)
plt.grid(True)
plt.legend()

text = f"Selected total weight: {total_w}/{capacity}\nSelected total value: {total_v}"
plt.gca().text(0.02, 0.02, text)

plt.tight_layout()

# =====
# 8) MAIN
# =====
def main():
    # ---- MILP baseline first (useful reference)
    milp_mask, milp_value, milp_weight, milp_time, milp_status = solve_milp_knapsack(
        weights, values, capacity
    )

    print("[MILP Optimal baseline]")
    print(f"Status: {milp_status}")
    print(f"Total weight: {milp_weight}/{capacity}")
    print(f"Total value: {milp_value}")

```

```

print(f"Solver time: {milp_time:.4f} sec\n")

# ---- Train NN (greedy labels, same instance)
print("Training Neural Network (greedy-label heuristic, same instance)...")
X, y = generate_training_data_same_instance(weights, values, capacity, samples=2000)
model = build_model(N_ITEMS)
model.fit(X, y, epochs=15, batch_size=32, verbose=1)
print("NN training completed.\n")

# ---- NN prediction -> mask -> repair
feat_single = np.array([X[0]], dtype=np.float32) # same features; one sample
nn_probs = model.predict(feat_single, verbose=0)[0]
nn_mask = [1 if p > 0.5 else 0 for p in nn_probs]
nn_mask = repair_to_capacity(nn_mask, weights, values, capacity)

print("NN initial mask (repaired):")
print(nn_mask)
print(f"NN mask weight/value: {solution_weight(nn_mask, weights)}/{capacity} |
{solution_value(nn_mask, values)}\n")

# ---- GA hyperparameters
POP_SIZE = 100
NGEN = 50
CXPB = 0.7
MUTPB = 0.2

# ---- Initialize population
pop = toolbox.population(n=POP_SIZE)

# Seed 20% with NN-based individuals (diversified + repaired)
seed_count = int(0.2 * POP_SIZE)
for i in range(seed_count):
    ind = creator.Individual(nn_mask.copy())

```

```

# diversify by flipping a few bits
for j in range(N_ITEMS):
    if random.random() < 0.05:
        ind[j] = 1 - ind[j]
# repair feasibility
repaired = repair_to_capacity(ind, weights, values, capacity)
pop[i] = creator.Individual(repaired)

# ---- Stats & logbook
stats = tools.Statistics(lambda ind: ind.fitness.values[0])
stats.register("avg", np.mean)
stats.register("min", np.min)
stats.register("max", np.max)

logbook = tools.Logbook()
logbook.header = ["gen", "nevals"] + stats.fields

# ---- Evaluate initial population
invalid = [ind for ind in pop if not ind.fitness.valid]
for ind, fit in zip(invalid, map(toolbox.evaluate, invalid)):
    ind.fitness.values = fit

record = stats.compile(pop)
logbook.record(gen=0, nevals=len(invalid), **record)
print(logbook.stream)

# ---- Recall storage
recall = []
best0 = tools.selBest(pop, 1)[0]
recall.append(
    {
        "gen": 0,
        "mask": list(best0),
    }
)

```

```

    "value": float(best0.fitness.values[0]),
    "weight": float(solution_weight(best0, weights)),
}
)

# ---- GA loop (with recall)
for gen in range(1, NGEN + 1):
    # selection + clone
    offspring = toolbox.select(pop, len(pop))
    offspring = list(map(toolbox.clone, offspring))

    # crossover
    for c1, c2 in zip(offspring[::2], offspring[1::2]):
        if random.random() < CXPB:
            toolbox.mate(c1, c2)
            del c1.fitness.values
            del c2.fitness.values

    # mutation
    for mut in offspring:
        if random.random() < MUTPB:
            toolbox.mutate(mut)
            del mut.fitness.values

    # evaluate invalid
    invalid = [ind for ind in offspring if not ind.fitness.valid]
    for ind, fit in zip(invalid, map(toolbox.evaluate, invalid)):
        ind.fitness.values = fit

    pop[:] = offspring

    record = stats.compile(pop)
    logbook.record(gen=gen, nevals=len(invalid), **record)

```

```

print(logbook.stream)

best = tools.selBest(pop, 1)[0]
recall.append(
    {
        "gen": gen,
        "mask": list(best),
        "value": float(best.fitness.values[0]),
        "weight": float(solution_weight(best, weights)),
    }
)

# ---- Print recall (simple text recall)
print("\n[Recall: best solution per generation]")
for r in recall:
    print(
        f"Gen {r['gen']:>2}: value={r['value']:.0f}, weight={r['weight']:.0f}/{capacity},
mask={r['mask']}"
    )

# ---- Final GA best
best = tools.selBest(pop, 1)[0]
best_value = float(best.fitness.values[0])
best_weight = float(solution_weight(best, weights))

print("\n[Hybrid (NN-seeded GA) best solution]")
print(best)
print(f"Total weight: {best_weight:.0f}/{capacity}")
print(f"Total value: {best_value:.0f}")

gap_final = (milp_value - best_value) / milp_value if milp_value > 0 else 0.0
print("\n[Comparison: Hybrid vs MILP]")
print(f"Hybrid value: {best_value:.0f} | weight: {best_weight:.0f}/{capacity}")

```

```
print(f"MILP value: {milp_value} | weight: {milp_weight}/{capacity}")
```

```
print(f"Optimality gap: {gap_final:.4%}")
```

```
greedy = greedy_mask(weights, values, capacity)
```

```
# ---- Plots
```

```
# A1) Scatter: MILP selection (conventional)
```

```
plot_items_scatter(  
    weights,  
    values,  
    milp_mask,  
    capacity,  
    title="Selected Items (MILP) on Weight-Value Plane"  
)
```

```
# A2) Scatter: Greedy selection (optional conventional baseline)
```

```
plot_items_scatter(  
    weights,  
    values,  
    greedy,  
    capacity,  
    title="Selected Items (Greedy) on Weight-Value Plane"  
)
```

```
# A3) Scatter: Hybrid GA+NN selection
```

```
plot_items_scatter(  
    weights,  
    values,  
    list(best),  
    capacity,  
    title="Selected Items (Hybrid GA+NN) on Weight-Value Plane"  
)
```

```

# B) GA convergence with MILP reference
generations = logbook.select("gen")
max_fitness = logbook.select("max")
avg_fitness = logbook.select("avg")

plt.figure()
plt.plot(generations, max_fitness, label="Max Fitness")
plt.plot(generations, avg_fitness, label="Avg Fitness")
plt.axhline(y=milp_value, label="MILP Optimum", linestyle="--")
plt.xlabel("Generation")
plt.ylabel("Fitness (Total Value)")
plt.title("GA Convergence with MILP Optimum Reference")
plt.grid(True)
plt.legend()

# C) Optimality gap over generations
gens = [r["gen"] for r in recall]
best_vals = [r["value"] for r in recall]
gap_series = [(milp_value - v) / milp_value if milp_value > 0 else 0.0 for v in best_vals]

plt.figure()
plt.plot(gens, gap_series, label="Optimality gap (best vs MILP)")
plt.xlabel("Generation")
plt.ylabel("Optimality gap")
plt.title("Optimality Gap Over Generations")
plt.grid(True)
plt.legend()

# Show everything at once
plt.show()

return gap_final

```

```
if __name__ == "__main__":

    N_RUNS = 20
    gaps = []

    for run in range(N_RUNS):
        print(f"\n--- Run {run+1}/{N_RUNS} ---")
        gap = main()
        gaps.append(gap)

    gaps = np.array(gaps)

    print("\n===== SUMMARY RESULTS =====")
    print(f"N items      : {N_ITEMS}")
    print(f"Runs          : {N_RUNS}")
    print(f"Mean gap      : {np.mean(gaps):.4%}")
    print(f"Std deviation: {np.std(gaps):.4%}")
```