ΔΙΕΘΝΕΣ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ

ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΚΑΙ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

“Δημιουργία Βιβλιοθήκης στην Python, η οποία θα περιέχει την Προσομοίωση των Μαθηματικών Συναρτήσεων με μεθόδους Αριθμητικής Ανάλυσης”

Του φοιτητή
Νικολάκαρου Σάββα
Αρ. Μητρώου: 154513

Επιβλέπων
Γουλιάνας Κωνσταντίνος
Βαθμίδα: Καθηγητής

Ημερομηνία 23/01/2025

Τίτλος Π.Ε: Δημιουργία Βιβλιοθήκης στην Python, η οποία θα περιέχει την Προσομοίωση των Μαθηματικών Συναρτήσεων με μεθόδους Αριθμητικής Ανάλυσης
Κωδικός Π.Ε: 22290
Ονοματεπώνυμο φοιτητή: Νικολάκαρος Σάββας
Ονοματεπώνυμο εισηγητή: Γουλιάνας Κωνσταντίνος
Ημερομηνία ανάληψης Π.Ε: 30/10/2022
Ημερομηνία περάτωσης Π.Ε: 23/01/2025

Βεβαιώνω ότι είμαι ο συγγραφέας αυτής της εργασίας και ότι κάθε βοήθεια την οποία είχα για την προετοιμασία της είναι πλήρως αναγνωρισμένη και αναφέρεται στην εργασία. Επίσης, έχω καταγράψει τις όποιες πηγές από τις οποίες έκανα χρήση δεδομένων, ιδεών, εικόνων και κειμένου, είτε αυτές αναφέρονται ακριβώς είτε παραφρασμένες. Επιπλέον, βεβαιώνω ότι αυτή η εργασία προετοιμάστηκε από εμένα προσωπικά, ειδικά ως πτυχιακή εργασία, στο Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής και Ηλεκτρονικών Συστημάτων του ΔΙ.ΠΑ.Ε.

Η έγκριση της πτυχιακής εργασίας από το Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής και Ηλεκτρονικών Συστημάτων του Διεθνούς Πανεπιστημίου της Ελλάδος, δεν υποδηλώνει απαραιτήτως και αποδοχή των απόψεων του συγγραφέα, εκ μέρους του Τμήματος.

Περίληψη

Στο πλαίσιο της παρούσας εργασίας μελετώνται γνωστοί αλγόριθμοι Αριθμητικής Ανάλυσης και υλοποιούνται στην γλώσσα προγραμματισμού Python. Αρχικά αναλύονται θεμελιώδεις έννοιες της επιστήμης υπολογιστών και των μαθηματικών όπως είναι οι αλγόριθμοι, η επεξεργασία πληροφοριών, οι διερμηνείς, η γραμμική άλγεβρα και η απαλοιφή Gauss. Στη συνέχεια γίνεται μία εισαγωγή στην Python και στο προγραμματιστικό περιβάλλον Visual Studio Code, περιγράφεται η βιβλιοθήκη της Python NumPy ως βασικό εργαλείο για την ανάπτυξη αλγορίθμων Αριθμητικής Ανάλυσης και παρατίθεται η διαδικασία δημιουργίας βιβλιοθήκης στην Python. Στο τρίτο κεφάλαιο αναλύονται οι γνωστοί αλγόριθμοι της Αριθμητικής Ανάλυσης, MacLaurin, Gauss – Seidel, Jacobi και Διαδοχικών Προσεγγίσεων. Για κάθε αλγόριθμο παρατίθεται ο ψευδοκώδικας ή η ακολουθία βημάτων εκτέλεσης του αλγορίθμου, όπως και παραδείγματα για την καλύτερη κατανόησή του.

Λέξεις – κλειδιά: αριθμητική ανάλυση, αλγόριθμοι, Python, βιβλιοθήκη, προγραμματισμός

Creation of Python package that contains a simulation of mathematical functions implemented with Arithmetic Analysis methodologies

Nikolakaros Savvas

Abstract

In the context of this thesis well – known Numerical Analysis algorithms are studied and implemented in Python. Initially, fundamental concepts of Computer Science and Mathematics are analyzed such as algorithms, information processing, interpreters, linear algebra and Gauss elimination. Subsequently, Python and Visual Studio Code IDE are introduced, Python library NumPy is described as a basic tool for developing Numerical Analysis algorithms and the process of creating a library in Python is explained. In the third chapter, Numerical Analysis algorithms of MacLaurin, Gauss – Seidel, Jacobi and Successive Approximations are studied. The pseudocode or the sequence of steps, as well as examples, of each algorithm are mentioned for achieving a deeper understanding of the procedures.

Keywords: numerical analysis, algorithms, Python, library, programming

Ευχαριστίες

Περιεχόμενα

Περίληψη 3

Abstract 4

Ευχαριστίες 5

Κατάλογος σχημάτων 7

Κατάλογος πινάκων 7

Εισαγωγή 8

Κεφάλαιο 1ο: Θεμελιώδεις έννοιες της επιστήμης υπολογιστών και των μαθηματικών 9

1.1 Αλγόριθμοι 9

1.2 Επεξεργασία Πληροφοριών 11

1.3 Μεταγλωττιστές και διερμηνείς 11

1.4 Γραμμική άλγεβρα 12

1.4.1 Διανύσματα 12

1.4.2 Πίνακες 13

1.5 Σφάλματα και τάξη σύγκλισης 15

1.6 Σύγκλιση επαναληπτικών μεθόδων 17

Κεφάλαιο 2ο: Γλώσσα προγραμματισμού Python 18

2.1 Εισαγωγή 18

2.2 Πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα 18

2.3 Βιβλιοθήκη NumPy 20

2.4 Μαθηματικές συναρτήσεις βιβλιοθήκης Math 23

2.5 Visual Studio Code 24

2.6 Δημιουργία βιβλιοθήκης στην Python 25

Κεφάλαιο 3ο: Αριθμητική Ανάλυση 27

3.1 Προσέγγιση συναρτήσεων 27

3.2 Σειρά Taylor 28

3.3 Σειρά Maclaurin 29

3.3.1 Ημίτονο 31

3.3.2 Υπερβολικό ημίτονο 32

3.3.3 Συνημίτονο 33

3.3.4 Υπερβολικό συνημίτονο 33

3.3.5 Αντίστροφη εφαπτομένη 34

3.3.6 Αντίστροφη υπερβολική εφαπτομένη 35

3.3.7 Εκθετική 35

3.3.8 Αντίστροφο ημίτονο 36

3.3.9 Αντίστροφο υπερβολικό ημίτονο 37

3.3.10 Αντίστροφο συνημίτονο 37
3.3.11 Αντίστροφο υπερβολικό συνημίτονο 38
3.3.12 Φυσικός λογάριθμος 1+x 39
3.3.13 Εφαπτομένη 39
3.3.14 Υπερβολική εφαπτομένη 41
3.3 Τετραγωνικό σύστημα εξισώσεων 41
3.4 Μέθοδος Gauss – Seidel 43
3.5 Μέθοδος Jacobi 48
3.5.1 Εύρεση αντιστρόφου τετραγωνικού πίνακα με τη μέθοδο Jacobi 51
3.6 Αλγόριθμος διαδοχικών προσεγγίσεων 54
3.6.1 Μελέτη σύγκλισης 56
3.6.2 Εύρεση ρίζας αριθμού με τη μέθοδο των Διαδοχικών Προσεγγίσεων 63
Βιβλιογραφία 65

Κατάλογος σχημάτων

Σχήμα 1.α: Πρόσθεση διανυσμάτων u και v 13
Σχήμα 1.β: Βαθμωτός πολλαπλασιασμός διανύσματος u με συντελεστή k 13
Σχήμα 2: Προσέγγιση συνάρτησης sinx με πολυωνυμικές συναρτήσεις 27
Σχήμα 3: Γεωμετρική παράσταση της Μεθόδου Σταθερού Σημείου 54

Κατάλογος πινάκων

Πίνακας 1: Τιμές συντελεστή σειράς Taylor της συνάρτησης $f(x) = (x-1)^3$ 28
Πίνακας 2: Συντελεστής σειράς MacLaurin της συνάρτησης sinx 29
Πίνακας 3: Συντελεστής σειράς MacLaurin της συνάρτησης 1/(1-x) 30
Πίνακας 4: Συντελεστής σειράς MacLaurin της συνάρτησης $\tan^{-1}(x)$ 31

Εισαγωγή

Η Αριθμητική Ανάλυση είναι ένα κεφάλαιο των μαθηματικών που περιλαμβάνει υπολογιστικές μεθόδους για την μελέτη και την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων. Η Αριθμητική Ανάλυση επίσης επεκτείνεται στην Επιστήμη των Υπολογιστών για την δημιουργία, την ανάλυση και την εφαρμογή αλγορίθμων που επιλύουν μαθηματικά προβλήματα σε αριθμητική βάση. Οι αριθμητικές μέθοδοι βασίζονται στην εφαρμογή αλγορίθμων Αριθμητικής Ανάλυσης. Συνεπώς, ο σκοπός αυτών των μεθόδων είναι παράσχουν συστηματικές τεχνικές για την επίλυση των μαθηματικών προβλημάτων σε αριθμητική βάση. Οι μέθοδοι Αριθμητικής Ανάλυσης είναι κατάλληλες για την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων με τη βοήθεια των σύγχρονων ψηφιακών υπολογιστών, καθώς εκμεταλλεύονται την ταχύτητα και την αποδοτικότητά τους στην εκτέλεση αριθμητικών διεργασιών.

Η επίλυση ενός μαθηματικού μοντέλου μέσω υπολογιστικών τεχνικών ή μέσω μεθόδων Αριθμητικής Ανάλυσης ανάγεται στην επίλυση προβλήματος γραμμικής άλγεβρας. Στην πραγματικότητα, τα φυσικά μοντέλα είναι αρκετές φορές γραμμικά, ενώ μερικές φορές είναι μη γραμμικά. Η εύρεση της λύσης ενός μη γραμμικού συστήματος επιτυγχάνεται αφού αυτό αναχθεί σε γραμμικό σύστημα. Αυτός είναι ο λόγος για τον οποίο η γραμμική άλγεβρα και η ανάλυση πινάκων έχουν μελετηθεί σε βάθος τις τελευταίες δεκαετίες.

Η Python ως γλώσσα προγραμματισμού υψηλού επιπέδου διαθέτει βιβλιοθήκες ειδικά σχεδιασμένες για αριθμητικούς υπολογισμούς όπως είναι οι βιβλιοθήκες NumPy, SciPy, Pandas και Matplotlib. Αυτές οι βιβλιοθήκες υλοποιούν αλγορίθμους Αριθμητικής ανάλυσης, δομές δεδομένων και την οπτικοποίηση των αποτελεσμάτων. Επιπλέον, το γεγονός ότι η Python είναι μία γλώσσα προγραμματισμού εύκολη στην εκμάθηση αλλά και το γεγονός ότι η Python είναι ανοιχτού κώδικα έχοντας μία μεγάλη κοινότητα να την υποστηρίζει, καθιστούν την Python μία πολύ καλή επιλογή για την ανάπτυξη αλγορίθμων Αριθμητικής Ανάλυσης.

Κεφάλαιο 1^{ο}: Θεμελιώδεις έννοιες της επιστήμης υπολογιστών και των μαθηματικών

Δύο από τις πιο βασικές έννοιες στην επιστήμη υπολογιστών είναι οι Αλγόριθμοι (Algorithms) και η Επεξεργασία Πληροφοριών (Information Processing). Για την εκτέλεση των προγραμμάτων γλωσσών προγραμματισμού υψηλού επιπέδου χρησιμοποιούνται είτε διερμηνείς (Interpreters) είτε μεταγλωττιστές (Compilers).

Η γραμμική άλγεβρα και έννοιες αυτής όπως τα διανύσματα, οι πίνακες και τα συστήματα γραμμικών εξισώσεων παίζουν καθοριστικό ρόλο στην Αριθμητική Ανάλυση. Οι πλέον βασικές μέθοδοι για την επίλυση συστημάτων γραμμικών εξισώσεων είναι η μέθοδος Cramer και η απαλοιφή Gauss. Η σύγκλιση των αλγορίθμων Αριθμητικής Ανάλυσης χαρακτηρίζεται από τα σφάλματα σε κάθε επανάληψη και την τάξη σύγκλισης.

1.1 Αλγόριθμοι

Κατά το παρελθόν οι άνθρωποι εφηύραν κάποιες από τις σύγχρονες υπολογιστικές μηχανές και πολλοί εξακολουθούν να χρησιμοποιούν υπολογιστικές μηχανές που θα μπορούσαν να θεωρηθούν πρωτόγονες. Για παράδειγμα, οι έμποροι στην αρχαιότητα δεν χρησιμοποιούσαν χρεωστικές κάρτες, υπολογιστές τσέπης ή ταμειακές μηχανές προκειμένου να υπολογίσουν τα ρέστα των πελατών. Μία μέθοδος για να υπολογιστούν τα ρέστα του πελάτη είναι ο υπολογισμός της διαφοράς μεταξύ της τιμής αγοράς του προϊόντος και του ποσού χρημάτων που ο πελάτης έδωσε στον έμπορο. Το αποτέλεσμα αυτού του υπολογισμού είναι το συνολικό ποσό που πρέπει να επιστρέψει ο έμπορος στον αγοραστή [1].

Σύμφωνα με μία άλλη μέθοδο, ο έμπορος ξεκινά με την τιμή αγοράς και σταδιακά προσπαθεί να φτάσει το ποσό χρημάτων που του έδωσε ο πελάτης. Αρχικά, επιλέγονται τα νομίσματα που στρογγυλοποιούν την τιμή στο επόμενο ευρώ. Στη συνέχεια επιλέγονται τόσα ευρώ ώστε η τιμή φτάσει σε πολλαπλάσιο των πέντε ευρώ. Με την ίδια λογική προστίθενται ευρώ στην τιμή του προϊόντος ούτως ώστε η τιμή να φτάσει το ποσό των χρημάτων που έδωσε ο πελάτης. Τα χρήματα που προστέθηκαν αντιστοιχούν στα ρέστα που πρέπει να δώσει ο έμπορος στον πελάτη [1].

Ελάχιστοι άνθρωποι μπορούν να αφαιρέσουν τριψήφιους αριθμούς χωρίς να καταφύγουν σε βοηθητικά μέσα, όπως το μολύβι και το χαρτί. Τα ακόλουθα βήματα περιγράφουν την διαδικασία αφαίρεσης δύο αριθμών χρησιμοποιώντας μολύβι και χαρτί [2]:

1. Γράψε τους δύο αριθμούς με τον μεγαλύτερο αριθμό πάνω από τον μικρότερο αριθμό έτσι ώστε τα ψηφία τους να είναι ευθυγραμμισμένα σε στήλες από τα δεξιά.
2. Υπέθεσε ότι ξεκινάς με την πλέον δεξιά στήλη ψηφία και εργάζεσαι προς τα αριστερά.
3. Γράψε την διαφορά μεταξύ των δύο ψηφίων στην τρέχουσα στήλη ψηφίων, δανειζόμενος έναν άσσο από τον πάνω αριθμό της επόμενης στήλης προς τα αριστερά, αν είναι απαραίτητο.
4. Αν δεν υπάρχει άλλη στήλη προς τα αριστερά, σταμάτα. Διαφορετικά, συνέχισε στην επόμενη στήλη προς τα αριστερά και πήγαινε πίσω στο βήμα 3.

Η ακολουθία βημάτων που περιγράφει την υπολογιστική διαδικασία ονομάζεται αλγόριθμος. Ανεπίσημα, ο αλγόριθμος ομοιάζει με μία συνταγή. Παρέχει μία λίστα οδηγιών που περιγράφει το πως γίνεται κάτι. Ένας αλγόριθμος περιγράφει μία διαδικασία η οποία καταλήγει σε μία λύση ενός προβλήματος. Ένας αλγόριθμος έχει τα ακόλουθα χαρακτηριστικά [1]:

- Ένας αλγόριθμος αποτελείται από πεπερασμένο αριθμό οδηγιών.
- Κάθε μεμονωμένη οδηγία σε έναν αλγόριθμο είναι καλά ορισμένη. Αυτό σημαίνει ότι κάθε ενέργεια που περιγράφεται από μία οδηγία μπορεί να εκτελεστεί αποτελεσματικά ή να εκτελεστεί από έναν υπολογιστικό πράκτορα (Computing Agent). Για παράδειγμα, κάθε υπολογιστικός πράκτορας που γνωρίζει αριθμητική μπορεί να υπολογίσει την διαφορά δύο ψηφίων. Έτσι ένα αλγοριθμικό βήμα που υπαγορεύει «Υπολόγισε την διαφορά μεταξύ δύο ψηφίων» είναι καλά ορισμένο. Από την άλλη πλευρά, ένα βήμα που λέει «διαίρεσε έναν αριθμό με το 0» δεν είναι καλά ορισμένο, γιατί κανένας υπολογιστικός πράκτορας δεν μπορεί να το φέρει εις πέρας.
- Ένας αλγόριθμος περιγράφει μία διαδικασία που τελικά σταματά αφού φτάσει σε μία λύση του προβλήματος. Για παράδειγμα, η διαδικασία της αφαίρεσης σταματά όταν ο υπολογιστικός πράκτορας γράψει την διαφορά μεταξύ των δύο ψηφίων στην πλέον αριστερή στήλη των ψηφίων.
- Ένας αλγόριθμος επιλύει μία γενική κλάση προβλημάτων. Για παράδειγμα, ένας αλγόριθμος περιγράφει το πως υπολογίζονται τα ρέστα για οποιαδήποτε δύο ποσά χρημάτων των οποίων η διαφορά είναι μεγαλύτερη ή ίση με το 0.

Η ανάπτυξη ενός αλγορίθμου συνεπάγεται την αυτοματοποίηση της διαδικασίας επίλυσης του προβλήματος. Οι υπολογιστές μπορούν να σχεδιαστούν για να εκτελούν ένα μικρό σύνολο αλγορίθμων ειδικευμένων διεργασιών όπως η λειτουργία ενός φούρνου μικροκυμάτων. Επίσης είναι δυνατή η κατασκευή υπολογιστών που είναι σε θέση να εκτελέσουν μία διεργασία που περιγράφεται από οποιονδήποτε αλγόριθμο.

1.2 Επεξεργασία Πληροφοριών

Από τότε που οι άνθρωποι ανακάλυψαν την γραφή, ξεκίνησαν να επεξεργάζονται την πληροφορία. Η πληροφορία, ιστορικά, έχει λάβει πολλές μορφές, από τα σύμβολα στις πήλινες πλάκες στην Μεσοποταμία μέχρι τα πρώτα γραπτά κείμενα στην αρχαία Ελλάδα και τις τυπωμένες λέξεις στα βιβλία, τις εφημερίδες και τα περιοδικά κατά την περίοδο της Αναγέννησης. Μόλις πρόσφατα οι άνθρωποι ανέπτυξαν την αυτοματοποίηση της επεξεργασίας της πληροφορίας μέσω των υπολογιστών. Στην επιστήμη υπολογιστών η πληροφορία αναφέρεται συχνά με τον όρο δεδομένα [1].

Η επεξεργασία πληροφοριών μπορεί να περιγραφεί με αλγόριθμους. Κατά την διάρκεια της εκτέλεσης των οδηγιών ενός αλγορίθμου, ο υπολογιστικός πράκτορας διαχειρίζεται την πληροφορία. Ο υπολογιστικός πράκτορας ξεκινά με κάποια πληροφορία, η οποία ονομάζεται είσοδος (Input). Μετασχηματίζει αυτή την πληροφορία σύμφωνα με καλά ορισμένους κανόνες και παράγει νέα πληροφορία, η οποία ονομάζεται έξοδος (Output).

Οι επιστήμονες πληροφορικής ανακάλυψαν τον τρόπο με τον οποίο αναπαρίστανται ως πληροφορία πολλές οντότητες, όπως είναι οι εικόνες, η μουσική, ο ανθρώπινος λόγος και το βίντεο. Οι συσκευές επικοινωνίας και τα πολυμέσα που σήμερα θεωρούμε δεδομένα, δεν θα υπήρχαν χωρίς αυτό το νέο είδος επεξεργασίας της πληροφορίας.

1.3 Μεταγλωττιστές και διερμηνείς

Ο μεταγλωττιστής (Compiler) και ο διερμηνέας (Interpreter) είναι δύο διαφορετικοί τρόποι για να μεταφραστεί ένα πρόγραμμα γλώσσας υψηλού επιπέδου σε γλώσσα μηχανής.

Ο μεταγλωττιστής λαμβάνει ολόκληρο το πρόγραμμα και τον μετατρέπει σε ενδιάμεσο κώδικα (Object code) ο οποίος συνήθως αποθηκεύεται σε ένα αρχείο. Ο ενδιάμεσος κώδικα συχνά αναφέρεται ως δυαδικός κώδικας (Binary code) και μπορεί να εκτελεστεί απευθείας από την μηχανή [10]. Παραδείγματα γλωσσών προγραμματισμού που χρησιμοποιούν μεταγλωττιστή είναι η C και η C++.

Ο διερμηνέας εκτελεί απευθείας εντολές που είναι γραμμένες σε μία γλώσσα προγραμματισμού υψηλού επιπέδου, χωρίς να τις μετατρέψει προηγουμένως σε ενδιάμεσο κώδικα ή με κώδικα μηχανής [10]. Παραδείγματα γλωσσών προγραμματισμού που χρησιμοποιούν διερμηνέα είναι η Perl, Python και η Matlab. Στην περίπτωση της Java, το πρόγραμμα αρχικά μεταγλωττίζεται σε μία ενδιάμεση μορφή και στη συνέχεια εκτελείται από τον διερμηνέα.

Τόσο οι μεταγλωττιστές όσο και οι διερμηνείς μετατρέπουν πηγαίο κώδικα αρχείων κειμένου σε κανόνες (tokens), παράγουν δένδρο συντακτικής ανάλυσης (Parse tree) και παράγουν άμεσες εντολές. Η βασική διαφορά είναι ότι ο μεταγλωττιστής δημιουργεί ένα ανεξάρτητο πρόγραμμα με κώδικα μηχανής, ενώ ο διερμηνέας εκτελεί τις ενέργειες που περιγράφονται στο πρόγραμμα της γλώσσας υψηλού επιπέδου [10].

Όταν ένα πρόγραμμα μεταγλωττιστεί, ο πηγαίος κώδικάς του δεν είναι πλέον χρήσιμος για την εκτέλεση του κώδικα. Από την άλλη πλευρά, στην περίπτωση του διερμηνέα ο πηγαίος κώδικας του προγράμματος είναι κάθε φορά απαραίτητος για την εκτέλεση του προγράμματος [10].

Αξίζει να σημειωθεί ότι τα προγράμματα που χρησιμοποιούν μεταγλωττιστή εκτελούνται ταχύτερα σε σχέση με αυτά που χρησιμοποιούν διερμηνέα.

1.4 Γραμμική άλγεβρα

Η γραμμική άλγεβρα αποτελεί ένα σημαντικό τμήμα του μαθηματικού υπόβαθρου που απαιτείται στα επιστημονικά πεδία των μαθηματικών, της μηχανικής, της επιστήμης υπολογιστών, της φυσικής και των οικονομικών. Η σημασία της γραμμικής άλγεβρας αποδεικνύεται από το εύρος των εφαρμογών της.

1.4.1 Διανύσματα

Υπάρχουν δύο τρόποι να γίνει αντιληπτή η έννοια τους διανύσματος: Μέσω λίστας αριθμών και μέσω συγκεκριμένων αντικειμένων στο πεδίο της φυσικής. Το πεδίο των πραγματικών αριθμών συμβολίζεται με το R και το πεδίο των μιγαδικών αριθμών συμβολίζεται με το C. Τα στοιχεία των διανυσμάτων είναι αριθμητικά δεδομένα και ονομάζονται βαθμωτά μεγέθη (scalars) [13].

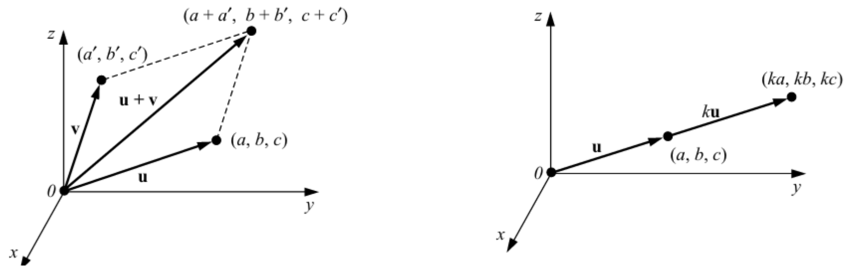
Πολλές φυσικές ποσότητες, όπως η θερμοκρασία και η ταχύτητα, χαρακτηρίζονται από το πλάτος (magnitude). Αυτές οι ποσότητες μπορούν να αναπαρασταθούν με πραγματικούς αριθμούς που ονομάζονται βαθμωτά μεγέθη. Από την άλλη πλευρά, υπάρχουν ποσότητες, όπως η δύναμη και η ταχύτητα, οι οποίες χαρακτηρίζονται τόσο από το πλάτος και την κατεύθυνση (direction). Αυτές οι ποσότητες, οι οποίες μπορούν να αναπαρασταθούν με βέλη που έχουν κατάλληλο μήκος και κατεύθυνση και προκύπτουν με βάση κάποιο σημείο αναφοράς, ονομάζονται διανύσματα (vectors) [13]. Ένα διάνυσμα στον χώρο R^3 αναπαρίσταται με τρεις συντεταγμένες πραγματικών αριθμών με κοινό σημείο αναφοράς και κάθε διάνυσμα προσδιορίζεται από αυτούς τους τρεις αριθμούς.

Οι δύο βασικές πράξεις διανυσμάτων είναι η πρόσθεση διανυσμάτων (Vector addition) και ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός (Scalar multiplication). Το αποτέλεσμα της πρόσθεσης δύο διανυσμάτων $u + v$ προκύπτει από τον κανόνα του παραλληλογράμμου. Με άλλα λόγια, το άθροισμα των διανυσμάτων είναι η διαγώνιος του παραλληλογράμμου που σχηματίζουν τα διανύσματα u και v. Αν $u = (a1, b1, c1)$ και $v = (a2, b2, c2)$ τότε $u + v = (a1 + a2, b1 + b2, c1 + c2)$. Επίσης το γινόμενο ku ενός διανύσματος u με έναν αριθμό k προκύπτει πολλαπλασιάζοντας το πλάτος του διανύσματος u

με το k και διατηρώντας την ίδια κατεύθυνση αν $k > 0$ ή την αντίθετη κατεύθυνση αν $k < 0$. Έτσι, αν $u = (a, b, c)$ τότε $ku = (ka, kb, kc)$ [13].

Ένα διάνυσμα στο χώρο Rn έχει την μορφή $u = (a1 , a2 , \dots , an)$. Το διάνυσμα προσδιορίζεται από το σημείο u και το σημείο αναφοράς. Δύο διανύσματα u και v είναι ίσα και ισχύει ότι $u = v$, αν έχουν τον ίδιο αριθμό συνιστωσών και αν οι αντίστοιχες συνιστώσες είναι ίσες. Για παράδειγμα, αν και τα διανύσματα (3, 4, 6) και (4, 6, 3) έχουν τον ίδιο αριθμό συνιστωσών, δεν είναι ίσα διότι οι αντίστοιχες συνιστώσες δεν είναι ίσες. Το διάνυσμα (0, 0, ..., 0) του οποίου όλες οι συνιστώσες είναι μηδέν λέγεται μηδενικό διάνυσμα (zero vector) και συνήθως συμβολίζεται με το 0.

Αν θεωρηθούν δύο τυχαία διανύσματα u και v στο Rn έτσι ώστε u = (a_1 , a_2 , … , a_n) και $v = (b1 , b2 , \dots , bn)$. Το εσωτερικό γινόμενο των δύο διανυσμάτων (inner product) u και v ορίζεται ως εξής: $u \cdot v = a1\, b1 + a2\, b2 + \dots + an\, bn$. Το εσωτερικό γινόμενο προκύπτει πολλαπλασιάζοντας τις αντίστοιχες συνιστώσες και προσθέτοντας τα γινόμενα. Τα διανύσματα u και v λέγονται ορθογώνια εάν το εσωτερικό γινόμενό τους είναι μηδέν ($u \cdot v = 0$) [13].



Σχήμα 1 α) Πρόσθεση διανυσμάτων u και v β) Βαθμωτός πολλαπλασιασμός διανύσματος u με συντελεστή k [13]

1.4.2 Πίνακες

Ένας πίνακας είναι μία ορθογώνια διάταξη βαθμωτών μεγεθών η οποία παρουσιάζεται με την μορφή [13]:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (1.4.2.1)$$

Οι γραμμές του πίνακα A είναι οι m οριζόντιες βαθμωτών μεγεθών $(\alpha_{m1}, \alpha_{m2}, \dots , \alpha_{mn})$ και οι στήλες του πίνακα A είναι οι n κάθετες λίστες βαθμωτών μεγεθών $(\alpha_{1n}, \alpha_{2n}, \dots , \alpha_{mn})$. Το στοιχείο α_{ij} εμφανίζεται στην γραμμή i και στην στήλη j του πίνακα A. Ένας πίνακας με m σειρές και n στήλες έχει διαστάσεις $m \cdot n$. Το ζεύγος των αριθμών m και n αντιστοιχεί στο μέγεθος του πίνακα. Δύο πίνακας A και Β θα είναι ίσοι έτσι ώστε Α = Β αν έχουν το ίδιο μέγεθος και τα αντίστοιχα στοιχεία τους είναι ίσα. Συνεπώς η ισότητα δύο πινάκων $m \cdot n$ είναι ισοδύναμη με ένα σύστημα $m \cdot n$ ισοτήτων, μία για κάθε ζεύγος στοιχείων [13].

Ένας πίνακας με μία μόνο σειρά είναι ένα διάνυσμα και ομοίως, ένας πίνακας με μία μόνο στήλη είναι επίσης διάνυσμα. Ένας πίνακας του οποίου τα στοιχεία είναι όλα μηδέν ονομάζεται μηδενικός πίνακας (zero matrix) και συνήθως παριστάνεται με το 0. Επιπλέον, τα στοιχεία ενός πίνακα μπορεί να είτε πραγματικοί αριθμοί που ανήκουν στο R είτε μιγαδικοί αριθμοί που ανήκουν στο C.

Όπως και στα διανύσματα, οι δύο βασικές πράξεις στους πίνακες είναι η πρόσθεση πινάκων και ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός. Αν θεωρηθούν δύο πίνακες A και B με διαστάσεων $m \cdot n$ με στοιχεία α_{ij} και b_{ij} και συντελεστής k, τότε το άθροισμά τους $A + B$ και ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός $k \cdot A$ θα είναι:

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \dots. & \dots. & \dots. & \dots. \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix} \quad (1.4.2.2)$$

$$kA = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \dots & ka_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \dots & ka_{mn} \end{bmatrix} \quad (1.4.2.3)$$

Οι πίνακες $A + B$ και $k \cdot A$ είναι επίσης πίνακες διαστάσεων mxn. Αναφορικά με τις ιδιότητες των πινάκων, ισχύει ότι $-A = (-1) \cdot A$ και $A - B = A + (-B)$. Ο πίνακας $-A$ είναι ο αρνητικός πίνακας του A και ο πίνακας $A - B$ είναι η διαφορά των πινάκων A και B. Αξίζει να σημειωθεί ότι δεν ορίζεται το άθροισμα πινάκων διαφορετικών διαστάσεων [13].

Έστω δύο πίνακες A και B με στοιχεία α_{ij} και b_{ij} και οι δύο πίνακες έχουν τον ίδιο αριθμό στηλών. Αν ο πίνακας Α έχει διαστάσεις mxp και ο πίνακας B έχει διαστάσεις pxn, τότε το γινόμενο $A \cdot B$ είναι ένας πίνακας C διαστάσεων mxn του οποίου το στοιχείο c_{ij} προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό $της\ i$ σειράς του πίνακα A με την j στήλη του πίνακα Β [13]:

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{ip} \cdot b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} \cdot b_{kj} \quad (1.4.2.4)$$

Το γινόμενο AB δεν ορίζεται στην περίπτωση που ο αριθμός των στηλών των πινάκων A και B διαφέρει.

Ο ανάστροφος πίνακας A^T ορίζεται ως ο πίνακας που προκύπτει εάν οι στήλες του A μετατραπούν σε σειρές. Με άλλα λόγια, αν ο πίνακας Α έχει διαστάσεις mxn και στοιχεία aij , τότε ο ανάστροφος πίνακας AT θα έχει διαστάσεις nxm και στοιχεία $bij = aji$.

Οι τετραγωνικοί πίνακες έχουν ίδιο αριθμό γραμμών και στηλών. Ένας τετραγωνικός πίνακας είναι αναστρέψιμος ή μη μοναδιαίος εάν υπάρχει τέτοιος πίνακας B ώστε $A \cdot B = B \cdot A = I$, όπου I είναι ο μοναδιαίος πίνακας (Identity matrix) [13]. Ο πίνακας B ονομάζεται αντίστροφος πίνακας του A και συμβολίζεται με το A^{-1}. Ισχύει ότι, εάν ο B είναι ο αντίστροφος πίνακας του A, τότε και ο A είναι ο αντίστροφος πίνακας του B.

Οι βασικές ιδιότητες των πινάκων συνοψίζονται παρακάτω:

- ✓ $(AB)C = A(BC)$
- ✓ $A(B + C) = AB + AC$
- ✓ $(B + C)A = BA + CA$
- ✓ $k(AB) = (kA)B = A(kB)$
- ✓ $(A + B)^T = A^T + B^T$
- ✓ $(A^T)^T = A$
- ✓ $(kA)^T = kA^T$
- ✓ $(AB)^T = B^T A^T$
- ✓ $AI = IA = A$
- ✓ $(kI)A = k(IA) = Ka$
- ✓ $(A_1 A_2 \dots A_k)^{-1} = A_k^{-1} \dots A_2^{-1} A_1^{-1}$

1.5 Σφάλματα και τάξη σύγκλισης

Στην Αριθμητική Ανάλυση ο προσδιορισμός του σφάλματος είναι σημαντικός για την επίλυση των προβλημάτων. Ως σφάλμα ορίζεται η διαφορά της αληθινής τιμής ενός αριθμού από την προσεγγιστική τιμή. Αν $x *$ είναι η προσεγγιστική τιμή και x η πραγματική τιμή ενός αριθμού τότε το σφάλμα δίνεται από τη σχέση [6][7]:

$$\varepsilon = x^* - x \quad (1.5.1)$$

Η αντίθετη ποσότητα του σφάλματος ονομάζεται Διόρθωση και δίνεται από τη σχέση [6][7]:

$$r = x - x^* \quad (1.5.2)$$

Η απόλυτη τιμή του σφάλματος ονομάζεται απόλυτο σφάλμα και δίνεται από τη σχέση [6][7]:

$$\varepsilon = |x^* - x| \quad (1.5.3)$$

Επιπλέον, το πηλίκο του σφάλματος δια του αριθμού x ονομάζεται σχετικό σφάλμα (Σχέση 1.5.1) και η απόλυτη τιμή αυτού ονομάζεται απόλυτο σχετικό σφάλμα (Σχέση 1.5.5) [6][7].

$$\varepsilon_\sigma = \frac{x^* - x}{x} \quad (1.5.4)$$

$$|\varepsilon_\sigma| = \left|\frac{x^* - x}{x}\right| \quad (1.5.5)$$

Κατά την αποθήκευση πραγματικών περιοδικών αριθμών στους ηλεκτρονικούς υπολογιστές και κατά τον υπολογισμό σειρών εμφανίζεται το σφάλμα αποκοπής. Επειδή οι σειρές έχουν άπειρο πλήθος όρων, είναι αδύνατο να αθροιστούν αυτοί οι όροι, με αποτέλεσμα να προστίθεται συγκεκριμένος πλήθος όρων και να αγνοούνται οι υπόλοιποι. Για παράδειγμα, το σφάλμα αποκοπής για την συνάρτηση e^x είναι [6][7]:

$$\varepsilon = x^* - x = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!} - \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} = -\sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{x^i}{i!} \quad (1.5.6)$$

Κατά την εκτέλεση των πράξεων από τον ηλεκτρονικό υπολογιστή μπορούν να χρησιμοποιηθούν αριθμοί πεπερασμένου αριθμού ψηφίων λόγω περιορισμών που θέτει η μνήμη του υπολογιστή. Ως εκ τούτου, οι πραγματικοί αριθμοί αντικαθίστανται από αριθμούς με λιγότερα ψηφία. Αυτή η διαδικασία ονομάζεται στρογγυλοποίηση και το σφάλμα που προκύπτει από την εφαρμογή της ονομάζεται σφάλμα στρογγυλοποίησης [7].

Η στρογγυλοποίηση ενός αριθμού με ν ψηφία επιτυγχάνεται παραλείποντας τα ψηφία από την $\nu + 1$ θέση και μετά. Το ψηφίο της ν θέσης παραμένει ως έχει ή αυξάνεται κατά μία μονάδα στην περίπτωση που το μέρος που παραλείπεται είναι μεγαλύτερο από μίση μονάδας της ν δεκαδικής τάξης. Στη περίπτωση που το μέρος που παραλείπεται είναι ακριβώς μισή μονάδα της ν δεκαδικής τάξης, τότε αν το νιοστό ψηφίο είναι άρτιο, παραμένει ως έχει, διαφορετικά αυξάνεται κατά μία μονάδα [6].

Αν $\{x_n\}$ είναι μία ακολουθία διαδοχικών προσεγγίσεων για μία επιθυμητή ρίζα ξ της εξίσωσης $f(x) = 0$, τότε το σφάλμα στην νιοστή επανάληψη ορίζεται ως $\varepsilon_n = \alpha - x_n$ και η προσέγγιση του σφάλματος ορίζεται ως $\varepsilon_n - \varepsilon_{n+1} = x_{n+1} - x_n$ [14]. Η διαδικασία της επανάληψης συγκλίνει αν και μόνο αν $\varepsilon_n \to 0$ καθώς $n \to \infty$.

Αν μία επαναληπτική μέθοδος συγκλίνει και υπάρχουν δύο σταθερές $p \geq 1$ και $C > 0$ τέτοιες ώστε $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n^p}\right| = C$ τότε το p ονομάζεται τάξης της σύγκλισης (Order of convergence) και το C ονομάζεται ασυμπτωτική σταθερά σφάλματος (Asymptotic error constant) [14].

Μία ακολουθία $\{x_n\}$ με $n \geq 0$ συνεπάγεται ότι συγκλίνει με τάξη σύγκλισης $p \geq 1$ σε μία ρίζα ξ αν $k|\varepsilon_n|^p \geq |\varepsilon_{n+1}|$ για $n \geq 0$ και για κάποια $k > 0$. Αν $p = 1$ τότε η ακολουθία των επαναλήψεων της ακολουθίας $\{x_n\}$ συγκλίνει γραμμικά. Στην περίπτωση που $p = 2$ η επαναληπτική μέθοδος συγκλίνει τετραγωνικά [14].

1.6 Σύγκλιση επαναληπτικών μεθόδων

Στις επαναληπτικές μεθόδους η διαδικασία ξεκινά με μία αρχική προσέγγιση ενός άγνωστου διανύσματος x της εξίσωσης $Ax = b$ και κατόπιν οι διαδοχικές προσεγγίσεις βελτιώνονται με μία διαδικασία επανάληψης: $x^{k+1} = Qx^k + C$, όπου x^{k+1} και x^k είναι η $k+1$ και η k προσεγγίσεις του διανύσματος x, αντίστοιχα, Q και C είναι ο πίνακας επαναλήψεων και το σταθερό διάνυσμα στήλης του αντίστοιχου σχήματος επανάληψης [14].

Συνδυάζοντας την εξίσωση $x = Qx + C$ με την εξίσωση του σφάλματος προκύπτει ότι $\varepsilon^k = Q^{(k)}\varepsilon^0$ για $k = 0, 1, 2, \dots$. Προκειμένου $\varepsilon^k \to 0$ καθώς $k \to \infty$ είναι απαραίτητο να ισχύει $Q^{(k)} \to 0$ καθώς $k \to \infty$ ή ισοδύναμα $\rho(Q) < 1$. Έτσι, προκύπτει ότι $\varepsilon^k \to 0$ καθώς $k \to \infty$ το οποίο σημαίνει ότι η επαναληπτική μέθοδος συγκλίνει με αρχικές τυχαίες τιμές x^0 εάν $|Q| < 1$.

Ο ρυθμός σύγκλισης (Rate of convergence) της επαναληπτικής μεθόδου ορίζεται ως $R = log\rho(Q)$ όπου $\rho(Q)$ είναι η φασματική ακτίνα του συγκλίνοντος πίνακα επανάληψης Q [14].

Κεφάλαιο 2ο: Γλώσσα προγραμματισμού Python

2.1 Εισαγωγή

Η Python δημιουργήθηκε το 1991 από τον Guido van Rossum. Η δημοφιλία και η ευρεία χρήση της Python αυξάνονται κατά τρόπο που είναι πρωτοφανής στην ιστορία των υπολογιστών. Υπάρχει ένα μεγάλο εύρος εφαρμογών όπου η Python διαπρέπει, όπως είναι το Shell Scripting, η αυτοματοποίηση διεργασιών (Task Automation), η ανάπτυξη λειτουργικών συστημάτων και η ανάπτυξη διαδικτυακών εφαρμογών (Web Development) [2]. Επιπλέον, η Python είναι η κατάλληλη γλώσσα για τα πεδία της ανάλυσης δεδομένων (Data Analysis) και της μηχανικής μάθησης (Machine Learning), αλλά είναι εφικτό να χρησιμοποιηθεί επίσης για την δημιουργία video games και για τον προγραμματισμό μικροελεγκτών.

Η Python διδάσκεται στα εισαγωγικά μαθήματα της Επιστήμης Υπολογιστών παγκοσμίως και για πολλούς μαθητές η Python είναι η πρώτη γλώσσα προγραμματισμού με την οποία έρχονται σε επαφή. Η Python, ως απλή γλώσσα προγραμματισμού υψηλού επιπέδου με μεγάλη κοινότητα παγκοσμίως και λόγω των τεχνικών ιδιαιτεροτήτων της όπως είναι η χρήση διερμηνέα (Interpreter), η δήλωση μεταβλητών χωρίς τον τύπο τους, προτιμάται επίσης από τους επαγγελματίες, καθώς η σύνταξη προγραμμάτων είναι ταχύτερη [2].

2.2 Πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα

Σε αυτή την ενότητα καταγράφονται τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα της γλώσσας προγραμματισμού Python. Τα βασικά πλεονεκτήματα της Python είναι τα παρακάτω [10]:

- **Ύπαρξη third – party modules**: Η Python έχει ένα πλούσιο οικοσύστημα από modules και βιβλιοθήκες τρίτων που επεκτείνουν την λειτουργικότητά της για διάφορες διεργασίες.
- **Εκτενής υποστήριξη βιβλιοθηκών**: Η Python ενισχύει την υποστήριξη βιβλιοθηκών όπως η NumPy για αριθμητικούς υπολογισμούς και η Pandas για ανάλυση δεδομένων, οι οποίες την καθιστούν κατάλληλη για επιστημονικές εφαρμογές και εφαρμογές ανάλυσης δεδομένων.

- **Λογισμικού ανοιχτού κώδικα και μεγάλη ενεργή κοινότητα**: Η Python είναι λογισμικό ανοιχτού κώδικα (Open Source) και έχει μία μεγάλη ενεργή κοινότητα η οποία συμβάλλει στην ανάπτυξη και την υποστήριξή της.
- **Ευέλικτη, εύκολη στην ανάγνωση, στην μάθηση και στην συγγραφή**: Η Python είναι γνωστή για την απλότητά της, γεγονός που την καθιστά μία εξαιρετική επιλογή τόσο για αρχάριους όσο και για πεπειραμένους προγραμματιστές.
- **Φιλικές προς τον χρήστη δομές δεδομένων**: Οι δομές δεδομένων της Python απλοποιούν σε μεγάλο βαθμό την διαχείριση των δεδομένων.
- **Γλώσσα υψηλού επιπέδου (High – level language)** : Η Python αφαιρεί τις λεπτομέρειες χαμηλού επιπέδου και με αυτόν τον τρόπο γίνεται πιο φιλική προς τον χρήστη.
- **Δυναμική δήλωση των δεδομένων**: Αυτό σημαίνει ότι οι διάφοροι τύποι δεδομένων στην Python δεν χρειάζεται να δηλωθούν, με αποτέλεσμα να ενισχύεται η ευελιξία και παράλληλα να διατηρείται η αξιοπιστία.
- **Αντικειμενοστραφής (Object – oriented) και διαδικαστική (Procedural) γλώσσα προγραμματισμού**: Η Python υποστηρίζει τόσο τον αντικειμενοστραφή όσο και τον διαδικαστικό προγραμματισμό.
- **Φορητή και διαδραστική**: Η Python μπορεί να εκτελεστεί σε πολλά λειτουργικά συστήματα και επιτρέπει την εκτέλεση κώδικα, όπως και τον έλεγχο του κώδικα, σε πραγματικό χρόνο.
- **Ιδανική για πρωτότυπα (Prototypes)** : Λόγω της περιληπτικής σύνταξης της Python οι προγραμματιστές μπορούν να αναπτύξουν πρωτότυπα γρήγορα και με λιγότερο κώδικα.
- **Υψηλή απόδοση**: Η σχεδίαση και οι δυνατότητες επεξεργασίας κειμένου της Python ενισχύουν τον έλεγχο των διαδικασιών και την απόδοση στην ανάπτυξη των εφαρμογών.
- **Διαδίκτυο των πραγμάτων (Internet of Things)** : Η Python χρησιμοποιείται κατά κόρον στις εφαρμογές IoT λόγω των χαρακτηριστικών της.
- **Διερμηνευμένη γλώσσα προγραμματισμού**: Ο διερμηνέας (Interpreter) της Python διευκολύνει το debugging και την ανάπτυξη κώδικα.

Από την άλλη πλευρά η Python παρουσιάζει τα ακόλουθα μειονεκτήματα [10]:

- **Απόδοση εκτέλεσης**: Η Python ως διερμηνευμένη γλώσσα προγραμματισμού μπορεί να είναι πιο αργή στην εκτέλεση του κώδικα σε σύγκριση με γλώσσες όπως είναι η C ή η Java.
- **Global Interpreter Lock**: Το GIL είναι ένας μηχανισμός στην Python που αποτρέπει την ταυτόχρονη εκτέλεση πολλαπλών νημάτων (threads). Αυτό το χαρακτηριστικό μπορεί να περιορίσει τον παραλληλισμό και τον συγχρονισμό κάποιων εφαρμογών.
- **Κατανάλωση μνήμης**: Η Python μπορεί να καταναλώσει μεγάλες ποσότητες μνήμης, ιδιαίτερα όταν πρόκειται για μεγάλο όγκο δεδομένων ή για σύνθετους αλγορίθμους.

- **Πακέτα λογισμικού και εκδόσεις**: Η Python περιέχει μεγάλο αριθμό πακέτων λογισμικού και βιβλιοθηκών, το οποίο μπορεί να οδηγήσει σε διενέξεις (Conflicts).
- **Έλλειψη αυστηρών κανόνων**: Η ευελιξία της Python μπορεί να γίνει δίκοπο μαχαίρι. Αν και η ευελιξία ενδείκνυται για ταχεία ανάπτυξη προγραμμάτων και πρωτότυπων, υπάρχει η πιθανότητα να καταστήσει τον κώδικα δύσκολο στην ανάγνωση και την συντήρηση.
- **Απότομη καμπύλη μάθησης (Learning curve)**: Αν και η Python είναι εύκολη στην μάθηση, οι αρχάριοι μπορεί να συναντήσουν ιδιαίτερες δυσκολίες στην εκμάθηση στην περίπτωση που δεν έχουν προγενέστερη εμπειρία στον προγραμματισμό.

2.3 Βιβλιοθήκη NumPy

Η βιβλιοθήκη NumPy (Numerical Python) είναι μία από τις πιο γνωστές βιβλιοθήκες της Python, η οποία επιτρέπει την επεξεργασία μεγάλου όγκου δεδομένων σε μορφή πινάκων. Για τον λόγο αυτό, χρησιμοποιείται για την επίλυση προβλημάτων Γραμμικής Άλγεβρας και Αριθμητικής Ανάλυσης [11]. Στη συνέχεια παρουσιάζονται οι μέθοδοι της NumPy με παραδείγματα, οι οποίες εξυπηρετούν την επίλυση τέτοιων προβλημάτων.

Η βιβλιοθήκη NumPy εισάγεται με την εντολή “import numpy as np”. Οι λίστες ή τα tuples μπορούν να μετατραπούν σε πίνακες με τη βοήθεια της βιβλιοθήκης NumPy. Ένας πίνακας δημιουργείται και εκτυπώνεται όπως στο ακόλουθο παράδειγμα:

x = np.array([4, 3, 5.5])

list(x)

Επιπλέον, ένας πίνακας μπορεί να δημιουργηθεί με χρήση μίας έκφρασης της Python:

x = np.array([i % 3 for in range(15)])

Σχετικά με τους πολυδιάστατους πίνακες, αυτοί ορίζονται με την ανάλογη σύνταξη. Για παράδειγμα, ένας πίνακας διαστάσεων 2x3 δημιουργείται ως εξής:

x = np.array([[1, 0, 3], [7, 2, 6]])

Η αρχικοποίηση ενός πίνακα γίνεται με την μέθοδο zeros():

x = np.zeros((4,3))

[[0. 0. 0.]

[0. 0. 0.]

[0. 0. 0.]

[0. 0. 0.]]

Η αρχικοποίηση ενός πίνακα μπορεί επίσης να γίνει με παρόμοιο τρόπο με την μέθοδο zeros_like(A), η οποία δέχεται ω μεταβλητή έναν πίνακα A και με βάση αυτόν, επιστρέφει έναν νέο πίνακα ο οποίος έχει τις ίδιες διαστάσεις με τον A και όλα τα στοιχεία του είναι μηδενικά:

```
x = np.array([[1, 0, 3], [7, 2, 6]])

y = np.zeros_like(x)

print(y)



[[0  0  0]

[0  0  0]]
```

Για την εύρεση του συνόλου των στοιχείων ενός πίνακα ανά συγκεκριμένο άξονα, χρησιμοποιείται η μέθοδος sum(A,axis) η οποία δέχεται ως παραμέτρους τον πίνακα A και τον άξονα axis (προαιρετικό) για τον οποίο θα γίνει η πρόσθεση των στοιχείων. Αν δεν διευκρινιστεί άξονας, γίνεται άθροιση όλων των στοιχείων του πίνακα.

```
print(np.sum([[0, 3], [0, 4]], axis=0))

[0   7]

print(np.sum([[0, 3], [0, 4]], axis=1))

[3   4]

print(np.sum([[0, 4], [0, 4]]))

7
```

Για την εύρεση της απόλυτης τιμής των στοιχείων ενός πίνακα, εφαρμόζεται η μέθοδος abs(A) η οποία δέχεται ως παράμετρο τον πίνακα A για τον οποίο θέλουμε να βρούμε την απόλυτη τιμή των στοιχείων του:

```
print(np.abs([10, -1, -2])

[10   1   2]
```

Για την εύρεση των διαγώνιων στοιχείων ενός πίνακα, χρησιμοποιείται η μέθοδος diag(A), η οποία δέχεται ως παράμετρο τον πίνακα A του οποίου τα διαγώνια στοιχεία θέλουμε να βρούμε και επιστρέφει έναν νέο πίνακα που τα περιέχει:

```
print(np.diag([[0, 2, 4], [6, 8, 10], [12, 14, 16]])

[0   8   14]
```

Για τον πολλαπλασιασμό δύο πινάκων εφαρμόζεται η μέθοδος dot(A,B):

```
x = np.array([[ 2, 5, 10], [ 3, 6, 11], [10, -1, -2]])
y = np.array([[ 0, 1, 5], [ 2, 16, -5]])
print(x)
print(y)
print(np.dot(y,x))
[[ 2   5  10]
 [ 3   6  11]
 [10 -1 -2]]
[[ 0   1   5]
 [ 2  16 -5]]
[[ 53   1     1 ]
 [  2  111 206]]
```

Η βιβλιοθήκη Numpy παρέχει το πακέτο numpy.linalg, το οποίο περιέχει αποδοτικές υλοποιήσεις χαμηλού επιπέδου, συναρτήσεων και αλγορίθμων γραμμικής άλγεβρας.

Η βιβλιοθήκη NumPy μπορεί να επιλύσει γραμμικά συστήματα εξισώσεων με χρήση της μεθόδου linalg.inv(A), η οποία δέχεται ως όρισμα τον μη ιδιάζοντα πίνακα A και παράγει ως έξοδο τον αντίστροφο πίνακα A^{-1}. Η επίλυση γραμμικού συστήματος εξισώσεων με αυτό τον τρόπο φαίνεται στο ακόλουθο παράδειγμα [11]:

$$\left\{\begin{matrix} 3x + 2y = 3 \\ 10x - y = 5 \end{matrix}\right\}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 10 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 10 & -1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

```
x = np.array([[3, 2], [10, -1]])
y = np.array([3, 5])
invx = np.linalg.inv(x)
print("Solution x is:",np.dot(invx,y))
Solution x is: [0.56521739 0.65217391]
```

Ακόμη μια χρήσιμη μέθοδος για την επίλυση συστημάτων είναι η numpy.linalg.norm(A, ord) η οποία δέχεται ως παράμετρο έναν πίνακα και την παράμετρο ord (προαιρετική) και επιστρέφει μια από τις 8 νόρμες μητρών, ανάλογα με την τιμή της μεταβλητής ord (non-zero int, inf, -inf, 'fro', 'nuc') ή μια από τις άπειρες νόρμες διανυσμάτων. Χρησιμοποιείται για τον έλεγχο σύγκλισης των υλοποιήσεων των μεθόδων Jacobi και Gauss – Seidel.

Ένα ακόμη πακέτο που παρέχει η βιβλιοθήκη numpy είναι το random, το οποίο παρέχει συναρτήσεις για την παραγωγή τυχαίων αριθμών. Μπορεί να φανεί χρήσιμο για περιπτώσεις που χρειάζεται η εισαγωγή τυχαίων αριθμών σε συναρτήσεις ή για να ελεγχθεί η σωστή λειτουργεία αλγορίθμων.

Για παράδειγμα για την αρχικοποίηση ενός πίνακα με τυχαίες τιμές, μπορεί να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος np.random.randint(low, high, size), η οποία επιστρέφει έναν πίνακα διαστάσεων ανάλογων της παραμέτρου size με αριθμούς από το low έως το high:

A = np.random.randint(-9,9,size=(3,3))

print(A)

[[1 -1 2]

[-3 0 4]

[-7 -6 3]]

2.4 Μαθηματικές συναρτήσεις βιβλιοθήκης Math

Παρατίθενται οι μαθηματικές συνάρτησεις του module Math της Python για τις οποίες υλοποιείται το ανάπτυγμα MacLaurin [17]:

sin(x)

Η συνάρτηση ημίτονο. Υπολογίζει το ημίτονο της γωνίας x, όπου x εκφράζεται σε ακτίνια.

cos(x)

Η συνάρτηση συνημίτονο. Υπολογίζει το συνημίτονο της γωνίας x, όπου x εκφράζεται σε ακτίνια.

exp(x)

Η συνάρτηση εκθετική. Υπολογίζει το e (την βάση των φυσικών λογαρίθμων) υψωμένο στη δύναμη x.

tan(x)

Η συνάρτηση εφαπτομένη. Υπολογίζει την εφαπτομένη της γωνίας x, όπου x εκφράζεται σε ακτίνια.

log1p(x) / log(1 + x)

Ο φυσικός λογάριθμος του 1 + x. Υπολογίζει το λογάριθμο της τιμής 1 + x με βάση το e.

sinh(x)

Η συνάρτηση υπερβολικού ημίτονου. Υπολογίζει το υπερβολικό ημίτονο της γωνίας x.

cosh(x)

Η συνάρτηση υπερβολικού συνημίτονου. Υπολογίζει το υπερβολικό συνημίτονο της γωνίας x.

tanh(x)

Η συνάρτηση υπερβολικής εφαπτομένης. Υπολογίζει την υπερβολική εφαπτομένη της γωνίας x.

asin(x)

Η συνάρτηση αντίστροφο ημίτονο. Υπολογίζει την αντίστροφη συνάρτηση του ημίτονου για την τιμή x.

acos(x)

Η συνάρτηση αντίστροφο συνημίτονο. Υπολογίζει την αντίστροφη συνάρτηση του συνημίτονου για την τιμή x.

atan(x)

Η συνάρτηση αντίστροφη εφαπτομένη. Υπολογίζει την αντίστροφη συνάρτηση της εφαπτομένης για την τιμή x.

asin(x)

Η συνάρτηση αντίστροφο υπερβολικό ημίτονο. Υπολογίζει την αντίστροφη συνάρτηση του υπερβολικού ημιτόνου για την τιμή x.

acos(x)

Η συνάρτηση αντίστροφο υπερβολικό συνημίτονο. Υπολογίζει την αντίστροφη συνάρτηση του υπερβολικού συνημίτονου για την τιμή x.

atanh(x)

Η συνάρτηση αντίστροφη υπερβολική εφαπτομένη. Υπολογίζει την αντίστροφη συνάρτηση της υπερβολικής εφαπτομένης για την τιμή x.

2.5 Visual Studio Code

Το Visual Studio Code είναι ένας ευρέως διαδεδομένος επεξεργαστής πηγαίου κώδικα τύπου open source, ο οποίος δημιουργήθηκε από την Microsoft. Το Visual Studio Code είναι ευέλικτο, γρήγορο και ελαφρύ λογισμικό και διαθέτει πολλά θετικά χαρακτηριστικά συμπεριλαμβανομένων της φιλικής προς τον χρήστη διεπαφής, της έξυπνης συμπλήρωσης κώδικα, του debugging, της υποστήριξης των γνωστών λειτουργικών συστημάτων (Windows, Linux, macOS), της ενσωμάτωσης Git, της live επεξεργασίας κώδικα και της υποστήριξης χιλιάδων επεκτάσεων [15].

Η πρώτη έκδοση του Visual Studio Code δημιουργήθηκε από την Microsoft το 2015 ως λογισμικό ανοιχτού κώδικα και ως εναλλακτική του Microsoft Visual Studio IDE. Η δημοφιλία του Visual Studio Code αυξήθηκε γρήγορα χάρη στον μεγάλο αριθμό επεκτάσεών του που αναπτύχθηκαν από προγραμματιστές και με αυτό τον τρόπο προστέθηκαν νέες λειτουργίες για διαφορετικά εργαλεία, γλώσσες προγραμματισμού και υπηρεσίες. Η ευέλικτη φύση του Visual Studio Code το καθιστά βιώσιμη λύση για τον διαδικτυακό προγραμματισμό και την ανάλυση δεδομένων, καθώς πρόκειται για έναν αποδοτικό ανεξάρτητο πλατφόρμας επεξεργαστή πηγαίου κώδικα, ο οποίος υποστηρίζει σχεδόν όλες τι γνωστές γλώσσες προγραμματισμού [15].

Το χαρακτηριστικό IntelliSense επιτρέπει την εξοικονόμηση χρόνου με την έξυπνη συμπλήρωση κώδικα, η οποία βασίζεται σε module, ορισμούς συναρτήσεων και τύπους μεταβλητών. Επιπλέον το Visual Studio Code επιτρέπει το debugging απευθείας από τον επεξεργαστή κώδικα με μία διαδραστική κονσόλα, breakpoints, βήματα κώδικα και επιθεώρηση μεταβλητών. Επιπλέον, είναι δυνατόν το refactoring του κώδικα ώστε να καταστεί καλύτερος στην ανάγνωση και πιο εύκολος στην συντήρηση. Η υποστήριξη του Git βελτιώνει την ροή εργασίας αξιοποιώντας όλες τις δυνατότητες του Git, όπως είναι τα commits και push – pull πηγαίου κώδικα, μέσω του ίδιου του περιβάλλοντος του Visual Studio Code [15].

Τα μειονεκτήματα του Visual Studio Code είναι τα παρακάτω:

- Καμπύλη μάθησης: Λόγω των πολλών χαρακτηριστικών και επιλογών εξατομίκευσης, οι αρχάριοι προγραμματιστές μπορεί χρειαστούν αρκετό χρόνο για να προσαρμοστούν στο περιβάλλον προγραμματισμού του Visual Studio Code.
- Σύνθετες ρυθμίσεις: Η εργασία με ένα μεγάλο αριθμό plugins μπορεί να καταστεί μία σύνθετη διαδικασία όταν πρόκειται για μεγάλα projects.
- Κατανάλωση πόρων: Τα πολλά plugins δεσμεύουν υπολογιστικούς πόρους.
- Ανταγωνισμός IDE: Ολοκληρωμένα περιβάλλοντα ανάπτυξης (Integrated Development Environments) όπως το IntelliJ IDEA, το PyCharm και το Visual Studio αποτελούν εναλλακτικές λύσεις του Visual Studio Code και σε αρκετές περιπτώσεις υπερτερούν του Visual Studio Code.

2.6 Δημιουργία βιβλιοθήκης στην Python

Η βιβλιοθήκη δημιουργείται με τη βοήθεια του Visual Studio Code σε λειτουργικό σύστημα Windows. Η διαδικασία για τη δημιουργία βιβλιοθήκης στην Python είναι η ακόλουθη [16]:

- ✓ **Δημιουργία φακέλου βιβλιοθήκης**: Ο φάκελος της βιβλιοθήκης δημιουργείται ως ένας νέος φάκελος των Windows.
- ✓ **Εγκατάσταση modules**: Εγκαθίστανται τα modules setuptools, wheel, sympy και numpy χρησιμοποιώντας την εντολή pip install.
- ✓ **Δημιουργία δομής φακέλου βιβλιοθήκης**: Μέσω του Visual Studio Code δημιουργείται εντός του φακέλου βιβλιοθήκης ένα κενό αρχείο setup.py και το αρχείο README.md το οποίο περιγράφει τα περιεχόμενο της βιβλιοθήκης. Στη συνέχεια δημιουργείται ο υποφάκελος με όνομα “num_methods”. Εντός του υποφακέλου δημιουργείται το αρχείο __init__.py το οποίο

υποδηλώνει ότι όποιο αρχείο υπάρχει μέσα στον υποφάκελο, περιλαμβάνεται επίσης στην βιβλιοθήκη.

- ✓ **Δημιουργία περιεχομένου βιβλιοθήκης**: Στον υποφάκελο num_methods τοποθετούνται τα αρχεία με επέκταση py τα οποία θα αποτελούν τις συναρτήσεις της βιβλιοθήκης. Το αρχείο setup.py περιέχει τον κώδικα:

```
from setuptools import setup, find_packages

setup(
    name='numMethods',  # Name of your package
    version='0.1',
    packages=find_packages(),
    install_requires=[
        'numpy>=1.21.0',
        'sympy>=1.9',
    ],
    description='A library for mathematical functions and algorithms',
    long_description=open('README.md').read(),
    long_description_content_type='text/markdown',
    author='Your Name',
    author_email='your.email@example.com',
    url='https://github.com/yourusername/my_library',
    license='MIT',
    python_requires='>=3.8',
)
```

- ✓ **Κατασκευή βιβλιοθήκης:** Από την γραμμή εντολών στον υποφάκελο num_methods εκτελείται η εντολή “python setup.py sdist bdist_wheel”. Με αυτό τον τρόπο δημιουργείται στον φάκελο dist τα αρχεία numMethods-0.1-py3-none-any.whl και numMethods-0.1.tar.gz. Η βιβλιοθήκη εγκαθίσταται με την εντολή “pip install /path/ numMethods-0.1.tar.gz. Επιπλέον, βιβλιοθήκη που δημιουργείται μπορεί να δημοσιευτεί σε καταθετήριο PyPI και να εγκαθίσταται online.

Η εισαγωγή της βιβλιοθήκης σε πρόγραμμα Python υλοποιείται με την εντολή:

```
import num_methods

from num_methos import*
```

Κεφάλαιο 3ο: Αριθμητική Ανάλυση

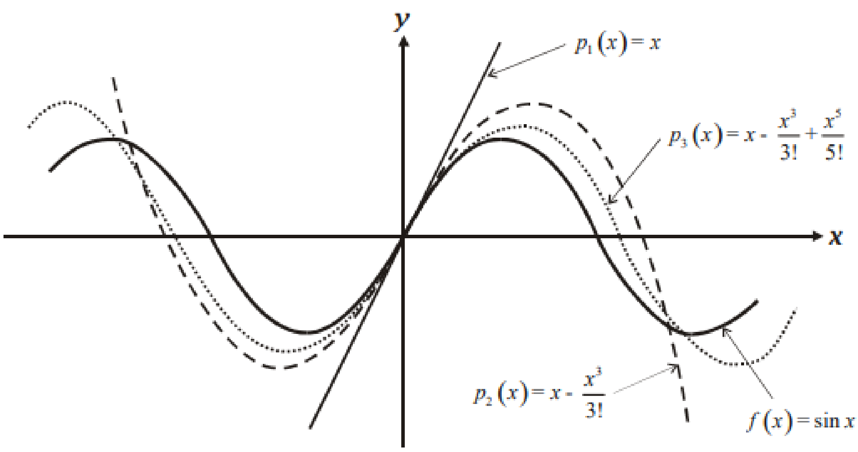
3.1 Προσέγγιση συναρτήσεων

Οι συναρτήσεις e^x και $\sin(x)$ είναι παραδείγματα υπερβατικών (transcendental) συναρτήσεων. Επιπλέον, η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 2x^2 - x + 5$ είναι ένα παράδειγμα πολυωνυμικής συνάρτησης. Θα ήταν χρήσιμο αν υπήρχε η δυνατότητα να αναλυθεί μία συνάρτηση όπως η $\sin(x)$ σε πολυωνυμική. Επειδή αυτό δεν είναι εφικτό, η $\sin(x)$ μπορεί να αναπαρασταθεί ως μία άπειρη σειρά πολυωνυμικών συναρτήσεις και να χρησιμοποιηθεί ένα πεπερασμένο τμήμα της σειράς για να βρεθεί η τιμή της $\sin(x)$ για δεδομένη τιμή του x. Η σειρά της συνάρτησης x είναι η εξής [3]:

$$sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \quad (3.1.1)$$

Η προσέγγιση του $sin(1/7)$ ισούται με 0.14237173. Συγκρίνοντας αυτή την τιμή με την πραγματική τιμή 0.142371729 φαίνεται ότι η προσέγγιση είναι αρκετά καλή και ότι η πρόσθεση περισσότερων όρων στην προσεγγιστική συνάρτηση θα έχει ως αποτέλεσμα μία τιμή ακόμα πιο κοντά στην πραγματική τιμή. Προκειμένου να οριστεί ειδικότερα η προσέγγιση της πραγματικής τιμής εφαρμόζονται τα κριτήρια της σύγκλισης (convergence) και του σφάλματος (error) [3].

Η πρόσθεση πολυωνυμικών όρων στην προσεγγιστική συνάρτηση καταλήγει σε σαφώς καλύτερη προσέγγιση της πραγματικής συνάρτησης όπως φαίνεται και στην γραφική παράσταση παρακάτω.



Σχήμα 2 Προσέγγιση συνάρτησης sinx με πολυωνυμικές συναρτήσεις [3]

3.2 Σειρά Taylor

Μία συνάρτηση είναι αναλυτική στο x = a αν είναι δυνατόν να γραφεί η συνάρτηση στην μορφή $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ για ορισμένους συντελεστές c_n με θετική ακτίνα σύγκλισης. Στην πράξη οποιαδήποτε σχέση που περιλαμβάνει τυπικές συναρτήσεις και διεργασίας ορίζει μία αναλυτική συνάρτηση, με την προϋπόθεση ότι η σχέση δίνει τιμές πραγματικών αριθμών σε ένα μικρό διάστημα γύρω από το σημείο $x = \alpha$. Για παράδειγμα η συνάρτηση $\frac{1}{x-a}$ δεν είναι αναλυτική στο σημείο $x = \alpha$, επειδή η τιμή της στο σημείο $x = \alpha$ είναι το άπειρο. Επίσης η συνάρτηση $\sqrt{x-\alpha}$ δεν είναι αναλυτική γιατί για σημεία με $x < \alpha$, προσπαθεί να υπολογίσει την τετραγωνική ρίζα αρνητικού αριθμού.

Αν μία συνάρτηση είναι αναλυτική στο σημείο $x = \alpha$ τότε αυτή μπορεί να διατυπωθεί ως μία πολυωνυμική σειρά η οποία ονομάζεται σειρά Taylor [12]:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \frac{f^{(4)}(a)}{4!}(x-a)^4 + \ldots \quad (3.2.1)$$

Η συνάρτηση της σχέσης (3.25) είναι έγκυρη εντός μίας ακτίνας σύγκλισης $|x-\alpha| < R$ με $R > 0$ ή συγκλίνει για όλα τα x. Εναλλακτικά η σχέση (3.25) μπορεί να διατυπωθεί με την μορφή $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ όπου $c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$. Όταν α = 0 τότε η σειρά Taylor ονομάζεται σειρά MacLaurin.

Ως παράδειγμα, υπολογίζεται η σειρά Taylor της συνάρτησης $f(x) = (x-1)^3$ στο σημείο $\alpha = 2$.

Πίνακας 1 Τιμές συντελεστή σειράς Taylor της συνάρτησης $f(x) = (x-1)^3$

Συνάρτηση συντελεστή πολυωνυμικού όρου	**Τιμή συντελεστή πολυωνυμικού όρου**
$f(x) = (x-1)^3$	$f(2) = 1$
$f^{(1)}(x) = 3(x-1)^2$	$f^{(1)}(2) = 3$
$f^{(2)}(x) = 6(x-1)$	$f^{(2)}(2) = 6$
$f^{(3)}(x) = 6$	$f^{(3)}(0) = 6$

Τελικά το ανάπτυγμα της σειράς Taylor που προκύπτει είναι:

$$f(x) = (x-2)^3 + 3(x-2)^2 + 3(x-2) + 1 \quad (3.2.2)$$

3.3 Σειρά Maclaurin

Το θεώρημα Maclaurin ορίζεται ως εξής [3]: Μία συνάρτηση $f(x)$ μπορεί να προσεγγιστεί από μία άπειρη σειρά πολυωνυμικών όρων του x. Η προσέγγιση ταυτίζεται με το γράφημα της $f(x)$ γύρω από ένα σταθερό σημείο. Στο θεώρημα Maclaurin το σταθερό σημείο είναι το 0. Η πολυωνυμική προσέγγιση γύρω από το 0 ορίζεται ως εξής [3]:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)x^2}{2!} + \frac{f'''(0)x^3}{3!} + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!} \quad (3.3.1)$$

Στην εξίσωση (3.3.1) τα σύμβολα $f', f'', f''', \ldots, f^n$, παριστάνουν την πρώτη, την δεύτερη, την τρίτη και την νιοστή παράγωγο της συνάρτησης $f(x)$ αντίστοιχα. Το σύμβολο $f^n(0)$ παριστάνει την τιμή της νιοστής παραγώγου στο 0. Η σειρά πρέπει να συγκλίνει με την συνάρτηση $f(x)$. Με άλλα λόγια, κάθε διαδοχικός όρος της σειράς είναι μικρότερος από τον προηγούμενο. Η μαθηματική αναπαράσταση της προηγούμενης πρότασης είναι η εξής [3]:

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} \quad (3.3.2)$$

Στη συνέχεια αναπτύσσεται η σειρά Maclaurin της συνάρτησης $f(x) = \sin(x)$ έως τον $7^{ο}$ όρο.

Πίνακας 2 Συντελεστής σειράς Maclaurin της συνάρτησης sinx

Συνάρτηση συντελεστή πολυωνυμικού όρου	**Τιμή συντελεστή πολυωνυμικού όρου**
f(x) = sinx	f(0) = 0
$f^{(1)}(x)$ = cosx	$f^{(1)}(0)$ = 1
$f^{(2)}(x)$ = -sinx	$f^{(2)}(0)$ = 0
$f^{(3)}(x)$ = -cosx	$f^{(3)}(0)$ = -1
$f^{(4)}(x)$ = sinx	$f^{(4)}(0)$ = 0
$f^{(5)}(x)$ = cosx	$f^{(5)}(0)$ = 1
$f^{(6)}(x)$ = -sinx	$f^{(6)}(0)$ = 0
$f^{(7)}(x)$ = -cosx	$f^{(7)}(0)$ = -1

Έτσι προκύπτει η σειρά Maclaurin:

$$f(x) = sin\,x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ \ldots \quad (3.3.3)$$

Οι σειρές Maclaurin που περιγράφονται παρακάτω θεωρούνται γνωστές:

$$\left\{\begin{array}{l} e^{x} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots \\ sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots \\ cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots \\ ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots \end{array}\right\} \quad (3.3.4)$$

Ένας τρόπος υπολογισμού του αναπτύγματος MacLaurin σε μορφή ψευδοκώδικα είναι [7]:

Αρχή

Διάβασε την συνάρτηση f και τον αριθμό των όρων του αναπτύγματος MacLaurin n

Για i = 0 , 1, 2, ... , n

Υπολόγισε $d = \frac{d^{(i)} f}{dx}(0)$

Υπολόγισε $sum = sum + \frac{d * x^i}{i!}$

Τέλος i

Τύπωσε sum

Τέλος

Παρακάτω παρατίθενται τα αναπτύγματα των συναρτήσεων $1/(1-x)$ και $\tan^{-1} x$ μέχρι τον 7ο όρο εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο για το ανάπτυγμα της σειράς MacLaurin.

Πίνακας 2 Συντελεστής σειράς Maclaurin της συνάρτησης 1/(1-x)

Συνάρτηση συντελεστή πολυωνυμικού όρου	**Τιμή συντελεστή πολυωνυμικού όρου**
$f(x) = 1/(1-x)$	$f(0) = 1$
$f^{(1)}(x) = 1/(1-x)^2$	$f^{(1)}(0) = 1$
$f^{(2)}(x) = 2/(1-x)^3$	$f^{(2)}(0) = 2$
$f^{(3)}(x) = 6/(1-x)^4$	$f^{(3)}(0) = 6$
$f^{(4)}(x) = 24/(1-x)^5$	$f^{(4)}(0) = 24$
$f^{(5)}(x) = 120/(1-x)^6$	$f^{(5)}(0) = 120$
$f^{(6)}(x) = 720/(1-x)^7$	$f^{(6)}(0) = 720$
$f^{(7)}(x) = 5040/(1-x)^8$	$f^{(7)}(0) = 5040$

Πίνακας 3 Συντελεστής σειράς Maclaurin της συνάρτησης $tan^{-1}(x)$

Συνάρτηση συντελεστή πολυωνυμικού όρου	**Τιμή συντελεστή πολυωνυμικού όρου**
$f(x) = \arctan(x)$	$f(0) = 0$
$f^{(1)}(x) = 1/(1-x^2)$	$f^{(1)}(0) = 1$
$f^{(2)}(x) = -2x/(1+x^2)^2$	$f^{(2)}(0) = 0$
$f^{(3)}(x) = 2(3x^2-1)/(1+x^2)^3$	$f^{(3)}(0) = -2$
$f^{(4)}(x) = -24x*(x^2-1)/ (1+x^2)^4$	$f^{(4)}(0) = 0$
$f^{(5)}(x) = 24(5x^4-10x^2+1)/(1+x^2)^5$	$f^{(5)}(0) = 24$
$f^{(6)}(x) = -240x(3x^4-10x^2+3)/(1+x^2)^6$	$f^{(6)}(0) = 0$
$f^{(7)}(x) = 720(7x^6-35x^4+21x^2-1)/(x^2+1)^7$	$f^{(7)}(0) = -720$

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{7} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 \quad (3.3.5)$$

$$f(x) = arctan(x) = \sum_{n=0}^{7} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 \quad (3.3.6)$$

Ακολουθεί ο υπολογισμός των αναγωγικών τύπων των μαθηματικών συναρτήσεων της σελίδας 24.

3.3.1 Ημίτονο

$$\sin(x), \qquad x \in R$$
$$Ανάπτυγμα\ MacLaurin\colon x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} \ldots, x \in (-\infty, \infty) \quad (3.3.1.1)$$

Η εύρεση του αναγωγικού τύπου γίνεται με την εύρεση του πηλίκου των διαδοχικών όρων του αναπτύγματος MacLaurin. Για παράδειγμα, διαιρώντας τον δεύτερο με τον πρώτο όρο και τον τρίτο με το δεύτερο, έχουμε τα εξής αποτελέσματα:

$$\frac{\frac{x^3}{3!}}{x} = \frac{x^3}{x \cdot 3!} = \frac{x^2}{3!} \quad \rightarrow \quad x \cdot \left(\frac{x^2}{3!}\right) = \frac{x^3}{3!}$$
$$\frac{\frac{x^5}{5!}}{\frac{x^3}{3!}} = \frac{x^5 \cdot 3!}{x^3 \cdot 5!} = \frac{x^2}{20} \quad \rightarrow \quad \frac{x^3}{3!} \cdot \left(\frac{x^2}{20}\right) = \frac{x^5}{5!}$$

Με αυτόν τον τρόπο επιτυγχάνεται η εύρεση του όρου που πρέπει να πολλαπλασιαστεί με τον α_nπροκειμένου να προκύψει ο όρος α_{n+1}, όπως φαίνεται παραπάνω.

Από τις διαιρέσεις των διαδοχικών όρων του παραπάνω αναπτύγματος MacLaurin για το ημίτονο, προκύπτουν τα παρακάτω αποτελέσματα:

$$n = 3, \frac{x^2}{6} \to n = 5, \frac{x^2}{20} \to n = 7, \frac{x^2}{42} \to n = 9, \frac{x^2}{72} \to \cdots$$
$$n = 3, \frac{x^2}{3 \cdot 2} \to n = 5, \frac{x^2}{5 \cdot 4} \to n = 7, \frac{x^2}{7 \cdot 6} \to n = 9, \frac{x^2}{9 \cdot 8} \to \cdots$$

Από τα παραπάνω εξάγεται ο αναγωγικός τύπος από τον οποίο προκύπτει το ανάπτυγμα MacLaurin:

$$a_{n+2} = a_n \cdot \left(\frac{x^2}{n \cdot (n-1)}\right) \cdot (-1), a_0 = 0 \quad (3.3.1.2)$$

Παρατίθεται ο ψευδοκώδικας για τον αλγόριθμο εφαρμόζοντας τον αναγωγικό τύπο:

$sum = x$
$oros = x$
$i = 3$
$oldsum = 0$

Για Όσο $|sum - oldsum| > 10^{-16}$
$oldsum = sum$
$oros = oros * \frac{x^2}{i \cdot (i-1)} * (-1)$
$sum = sum + oros$
$i = i + 2$

3.3.2 Υπερβολικό ημίτονο

$$\sinh(x), \qquad x \in R$$
$$Ανάπτυγμα\ MacLaurin: x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} \ldots x \in (-\infty, \infty) \quad (3.3.2.1)$$

Από τις διαιρέσεις των διαδοχικών όρων του παραπάνω αναπτύγματος MacLaurin, προκύπτουν τα παρακάτω αποτελέσματα:

$$n = 3, \frac{x^2}{6} \to n = 5, \frac{x^2}{20} \to n = 7, \frac{x^2}{42} \to n = 9, \frac{x^2}{72} \to \cdots$$
$$n = 3, \frac{x^2}{3 \cdot 2} \to n = 5, \frac{x^2}{5 \cdot 4} \to n = 7, \frac{x^2}{7 \cdot 6} \to n = 9, \frac{x^2}{9 \cdot 8} \to \cdots$$

Από τα παραπάνω εξάγεται ο αναγωγικός τύπος από τον οποίο προκύπτει το ανάπτυγμα MacLaurin:

$$a_{n+2} = a_n \cdot \left(\frac{x^2}{n \cdot (n-1)}\right), a_0 = 0 \quad (3.3.2.2)$$

Παρατίθεται ο ψευδοκώδικας για τον αλγόριθμο εφαρμόζοντας τον αναγωγικό τύπο:

$sum = x$
$oros = x$
$i = 3$
$oldsum = 0$

Για Όσο $|sum - oldsum| > 10^{-16}$
$oldsum = sum$
$oros = oros * \frac{x^2}{i \cdot (i-1)}$

$sum = sum + oros$
$i = i + 2$

3.3.3 Συνημίτονο

$$\cos(x), \qquad x \in R$$
$$Ανάπτυγμα\ MacLaurin: 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots, x \in (-\infty, \infty) \quad (3.3.3.1)$$

Από τις διαιρέσεις των διαδοχικών όρων του παραπάνω αναπτύγματος MacLaurin, προκύπτουν τα παρακάτω αποτελέσματα:

$$n = 2, \frac{x^2}{2} \to n = 4, \frac{x^2}{12} \to n = 6, \frac{x^6}{30} \to n = 8, \frac{x^2}{56}$$
$$n = 2, \frac{x^2}{2 \cdot 1} \to n = 4, \frac{x^2}{4 \cdot 3} \to n = 6, \frac{x^6}{6 \cdot 5} \to n = 8, \frac{x^2}{8 \cdot 7}$$

Από τα παραπάνω εξάγεται ο αναγωγικός τύπος από τον οποίο προκύπτει το ανάπτυγμα MacLaurin:

$$a_{n+2} = a_n \cdot \left(\frac{x^2}{n \cdot (n-1)}\right) \cdot (-1), a_0 = 1 \quad (3.3.3.2)$$

Παρατίθεται ο ψευδοκώδικας για τον αλγόριθμο εφαρμόζοντας τον αναγωγικό τύπο:

$sum = 1$
$oros = 1$
$i = 2$
$oldsum = 0$

Για Όσο $|sum - oldsum| > 10^{-16}$
$oldsum = sum$
$oros = oros * \frac{x^2}{i \cdot (i-1)} * (-1)$
$sum = sum + oros$
$i = i + 2$

3.3.4 Υπερβολικό συνημίτονο

$$\cosh(x), \qquad x \in R$$
$$Ανάπτυγμα\ MacLaurin: 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \cdots, x \in (-\infty, \infty) \quad (3.3.4.1)$$

Από τις διαιρέσεις των διαδοχικών όρων του παραπάνω αναπτύγματος MacLaurin, προκύπτουν τα παρακάτω αποτελέσματα:

$$n = 2, \frac{x^2}{2} \to n = 4, \frac{x^2}{12} \to n = 6, \frac{x^6}{30} \to n = 8, \frac{x^2}{56}$$
$$n = 2, \frac{x^2}{2 \cdot 1} \to n = 4, \frac{x^2}{4 \cdot 3} \to n = 6, \frac{x^6}{6 \cdot 5} \to n = 8, \frac{x^2}{8 \cdot 7}$$

Από τα παραπάνω εξάγεται ο αναγωγικός τύπος από τον οποίο προκύπτει το ανάπτυγμα MacLaurin:

$$a_{n+2} = a_n \cdot \left(\frac{x^2}{n \cdot (n-1)}\right), a_0 = 1 \quad (3.3.4.2)$$

Παρατίθεται ο ψευδοκώδικας για τον αλγόριθμο εφαρμόζοντας τον αναγωγικό τύπο:

$sum = 1$
$oros = 1$
$i = 2$
$oldsum = 0$

$Για\ Όσο\ |sum - oldsum| > 10^{-16}$
  $oldsum = sum$
  $oros = oros * \frac{x^2}{i \cdot (i-1)}$
  $sum = sum + oros$
  $i = i + 2$

3.3.5 Αντίστροφη εφαπτομένη

$$\operatorname{atan}(x), \qquad x \in R$$

$$Ανάπτυγμα\ MacLaurin: x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \cdots, x \in (-\infty, \infty) \quad (3.3.5.1)$$

Από τις διαιρέσεις των διαδοχικών όρων του παραπάνω αναπτύγματος MacLaurin, προκύπτουν τα παρακάτω αποτελέσματα:

$$n = 3, \frac{x^2}{3} \to n = 5, 3 \cdot \frac{x^2}{5} \to n = 7, 5 \cdot \frac{x^2}{7}$$
$$n = 3, (3-2) \cdot \frac{x^2}{3} \to n = 5, (5-2) \cdot \frac{x^2}{5} \to n = 7, (7-5) \cdot \frac{x^2}{7}$$

Από τα παραπάνω εξάγεται ο αναγωγικός τύπος από τον οποίο προκύπτει το ανάπτυγμα MacLaurin:

$$a_{n+2} = a_n \cdot (n-2) \cdot \frac{x^2}{n} \cdot (-1), a_0 = 0 \quad (3.3.5.2)$$

Παρατίθεται ο ψευδοκώδικας για τον αλγόριθμο εφαρμόζοντας τον αναγωγικό τύπο:

$sum = x$
$oros = x$
$i = 3$
$oldsum = 0$

$Για\ Όσο\ |sum - oldsum| > 10^{-16}$
  $oldsum = sum$
  $oros = oros * (i-2) \cdot \frac{x^2}{i} \cdot (-1)$
  $sum = sum + oros$
  $i = i + 2$

3.3.6 Αντίστροφη υπερβολική εφαπτομένη

$$\operatorname{atanh}(x), \qquad x \in R : -1 < x < 1$$
$$Ανάπτυγμα\ MacLaurin: x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} + \cdots\ x \in (-1,1) \quad (3.3.6.1)$$

Από τις διαιρέσεις των διαδοχικών όρων του παραπάνω αναπτύγματος MacLaurin, προκύπτουν τα παρακάτω αποτελέσματα:

$$n = 3, \frac{x^2}{3} \to n = 5, 3 \cdot \frac{x^2}{5} \to n = 7, 5 \cdot \frac{x^2}{7}$$
$$n = 3, (3-2) \cdot \frac{x^2}{3} \to n = 5, (5-2) \cdot \frac{x^2}{5} \to n = 7, (7-5) \cdot \frac{x^2}{7}$$

Από τα παραπάνω εξάγεται ο αναγωγικός τύπος από τον οποίο προκύπτει το ανάπτυγμα MacLaurin:

$$a_{n+2} = a_n \cdot (n-2) \cdot \frac{x^2}{n}, a_0 = 0 \quad (3.3.6.2)$$

Παρατίθεται ο ψευδοκώδικας για τον αλγόριθμο εφαρμόζοντας τον αναγωγικό τύπο:

$sum = x$
$oros = x$
$i = 3$
$oldsum = 0$

Για Όσο $|sum - oldsum| > 10^{-16}$
$oldsum = sum$
$oros = oros * (i-2) \cdot \frac{x^2}{i}$
$sum = sum + oros$
$i = i + 2$

3.3.7 Εκθετική

$$\exp(x), \qquad x \in R$$
$$Ανάπτυγμα\ MacLaurin: 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \cdots\ x \in (-\infty, \infty) \quad (3.3.7.1)$$

Από τις διαιρέσεις των διαδοχικών όρων του παραπάνω αναπτύγματος MacLaurin, προκύπτουν τα παρακάτω αποτελέσματα:

$$n = 2, \frac{x}{2} \to n = 3, \frac{x}{3} \to n = 4, \frac{x}{4} \to n = 5, \frac{x}{5} \to \cdots$$

Από τα παραπάνω εξάγεται ο αναγωγικός τύπος από τον οποίο προκύπτει το ανάπτυγμα MacLaurin:

$$a_{n+2} = a_n \cdot \frac{x}{n}, a_0 = 1 \quad (3.3.7.2)$$

Παρατίθεται ο ψευδοκώδικας για τον αλγόριθμο εφαρμόζοντας τον αναγωγικό τύπο:

$sum = 1$
$oros = 1$

$i = 1$
$oldsum = 0$

$Για\ Όσο\ |sum - oldsum| > 10^{-16}$
$\quad oldsum = sum$
$\quad oros = oros * x/i$
$\quad sum = sum + oros$
$\quad i = i + 1$

3.3.8 Αντίστροφο ημίτονο

$$\mathrm{asin(x)}, \qquad \mathrm{x \in R:\ -1 < x < 1}$$
$$Ανάπτυγμα\ MacLaurin: x + \frac{x^3}{6} + \frac{3\,x^5}{40} + \frac{5\,x^7}{112} + \frac{35\,x^9}{1152} + \cdots x \in (-1,1) \quad (3.3.8.1)$$

Από τις διαιρέσεις των διαδοχικών όρων του παραπάνω αναπτύγματος MacLaurin, προκύπτουν τα παρακάτω αποτελέσματα:

$$n = 3, \frac{x^2}{6} \to n = 5, 9 \cdot \frac{x^2}{20} \to n = 7, 25 \cdot \frac{x^2}{42} \to \cdots$$
$$n = 3, (3-2)^2 \cdot \frac{x^2}{3 \cdot (3-2)} \to n = 5, (5-2)^2 \cdot \frac{x^2}{5 \cdot (5-1)} \to$$
$$n = 7, (7-2)^2 \cdot \frac{x^2}{7 \cdot (7-6)} \to \cdots$$

Από τα παραπάνω εξάγεται ο αναγωγικός τύπος από τον οποίο προκύπτει το ανάπτυγμα MacLaurin:

$$a_{n+2} = (n-2)^2 \cdot \frac{x^2}{n \cdot (n-1)} \quad (3.3.8.2)$$

Παρατίθεται ο ψευδοκώδικας για τον αλγόριθμο εφαρμόζοντας τον αναγωγικό τύπο:

$sum = x$
$oros = x$
$i = 3$
$oldsum = 0$

$Για\ Όσο\ |sum - oldsum| > 10^{-16}$
$\quad oldsum = sum$
$\quad oros = oros * (i-2)^2 \cdot \frac{x^2}{i \cdot (i-1)}$
$\quad sum = sum + oros$
$\quad i = i + 2$

3.3.9 Αντίστροφο υπερβολικό ημίτονο

$$\operatorname{asinh}(x), \qquad x \in R$$

$$Ανάπτυγμα\ MacLaurin: x - \frac{x^3}{6} + \frac{3\,x^5}{40} - \frac{5\,x^7}{112} + \frac{35\,x^9}{1152} - \cdots x \in (-\infty, \infty) \quad (3.3.9.1)$$

Από τις διαιρέσεις των διαδοχικών όρων του παραπάνω αναπτύγματος MacLaurin, προκύπτουν τα παρακάτω αποτελέσματα:

$$n = 3, \frac{x^2}{6} \rightarrow n = 5, 9 \cdot \frac{x^2}{20} \rightarrow n = 7, 25 \cdot \frac{x^2}{42} \rightarrow \cdots$$

$$n = 3, (3-2)^2 \cdot \frac{x^2}{3 \cdot (3-2)} \rightarrow n = 5, (5-2)^2 \cdot \frac{x^2}{5 \cdot (5-1)} \rightarrow$$

$$n = 7, (7-2)^2 \cdot \frac{x^2}{7 \cdot (7-6)} \rightarrow \cdots$$

Από τα παραπάνω εξάγεται ο αναγωγικός τύπος από τον οποίο προκύπτει το ανάπτυγμα MacLaurin:

$$a_{n+2} = (n-2)^2 \cdot \frac{x^2}{n \cdot (n-1)} \cdot (-1) \quad (3.3.9.2)$$

Παρατίθεται ο ψευδοκώδικας για τον αλγόριθμο εφαρμόζοντας τον αναγωγικό τύπο:

$sum = x$
$oros = x$
$i = 3$
$oldsum = 0$

$Για\ Όσο\ |sum - oldsum| > 10^{-16}$
    $oldsum = sum$
    $oros = oros * (i-2)^2 \cdot \frac{x^2}{i \cdot (i-1)} \cdot (-1)$
    $sum = sum + oros$
    $i = i + 2$

3.3.10 Αντίστροφο συνημίτονο

$$\operatorname{acos}(x), \qquad x \in R : -1 \leq x \leq 1$$

$$Ανάπτυγμα\ MacLaurin: \frac{\pi}{2} - x - \frac{x^3}{6} - \frac{3\,x^5}{40} - \frac{5\,x^7}{112} - \frac{35\,x^9}{1152} - \cdots x \in [-1,1] \quad (3.3.10.1)$$

Από τις διαιρέσεις των διαδοχικών όρων του παραπάνω αναπτύγματος MacLaurin, προκύπτουν τα παρακάτω αποτελέσματα:

$$n = 3, \frac{x^2}{6} \rightarrow n = 5, 9 \cdot \frac{x^2}{20} \rightarrow n = 7, 25 \cdot \frac{x^2}{42} \rightarrow \cdots$$

$$n = 3, (3-2)^2 \cdot \frac{x^2}{3 \cdot (3-2)} \rightarrow n = 5, (5-2)^2 \cdot \frac{x^2}{5 \cdot (5-1)} \rightarrow$$

$$n = 7, (7-2)^2 \cdot \frac{x^2}{7 \cdot (7-6)} \rightarrow \cdots$$

Από τα παραπάνω εξάγεται ο αναγωγικός τύπος από τον οποίο προκύπτει το ανάπτυγμα MacLaurin:

$$a_{n+2} = (-1) \cdot (n-2)^2 \cdot \frac{x^2}{n \cdot (n-1)} \quad (3.3.10.2)$$

Παρατίθεται ο ψευδοκώδικας για τον αλγόριθμο εφαρμόζοντας τον αναγωγικό τύπο:

$sum = x$
$oros = x$
$i = 3$
$oldsum = 0$

Για Όσο $|sum - oldsum| > 10^{-16}$
  $oldsum = sum$
  $oros = oros \cdot (i-2)^2 \cdot \frac{x^2}{i \cdot (i-1)}$
  $sum = sum + oros$
  $i = i + 2$

$sumTotal = \frac{\pi}{2} - sum$

3.3.11 Αντίστροφο υπερβολικό συνημίτονο

$$\operatorname{acosh}(x), \qquad x \in R : x \geq 1$$

$$Ανάπτυγμα\ MacLaurin: \frac{\pi}{2} + x + \frac{x^3}{6} + \frac{3\,x^5}{40} + \frac{5\,x^7}{112} + \frac{35\,x^9}{1152} + \cdots \quad x \in [1, \infty) \quad (3.3.11.1)$$

Από τις διαιρέσεις των διαδοχικών όρων του παραπάνω αναπτύγματος MacLaurin, προκύπτουν τα παρακάτω αποτελέσματα:

$$n = 3, \frac{x^2}{6} \rightarrow n = 5, 9 \cdot \frac{x^2}{20} \rightarrow n = 7, 25 \cdot \frac{x^2}{42} \rightarrow \cdots$$

$$n = 3, (3-2)^2 \cdot \frac{x^2}{3 \cdot (3-2)} \rightarrow n = 5, (5-2)^2 \cdot \frac{x^2}{5 \cdot (5-1)} \rightarrow$$
$$n = 7, (7-2)^2 \cdot \frac{x^2}{7 \cdot (7-6)} \rightarrow \cdots$$

Από τα παραπάνω εξάγεται ο αναγωγικός τύπος από τον οποίο προκύπτει το ανάπτυγμα MacLaurin:

$$a_{n+2} = (n-2)^2 \cdot \frac{x^2}{n \cdot (n-1)} \quad (3.3.11.2)$$

Παρατίθεται ο ψευδοκώδικας για τον αλγόριθμο εφαρμόζοντας τον αναγωγικό τύπο:

$sum = x$
$oros = x$
$i = 3$
$oldsum = 0$

$Για\ Όσο\ |sum - oldsum| > 10^{-16}$
$oldsum = sum$
$oros = oros * (i-2)^2 \cdot \frac{x^2}{i \cdot (i-1)}$
$sum = sum + oros$
$i = i + 2$

$sumTotal = \frac{\pi}{2} - sum$

3.3.12 Φυσικός λογάριθμος 1+x

$$log1p(x), \qquad x \in R : x > -1$$
$$Ανάπτυγμα\ MacLurin: x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \cdots \quad x \in (-1, \infty) \ (3.3.12.1)$$

Από τις διαιρέσεις των διαδοχικών όρων του παραπάνω αναπτύγματος MacLaurin, προκύπτουν τα παρακάτω αποτελέσματα:

$$n = 2, \frac{x}{2} \to n = 3, 2 \cdot \frac{x}{3} \to n = 4, 3 \cdot \frac{x}{4} \to \cdots$$
$$n = 2, (2-1) \cdot \frac{x}{2} \to n = 3, (3-1) \cdot \frac{x}{3} \to n = 4, (4-1) \cdot \frac{x}{4} \to \cdots$$

Από τα παραπάνω εξάγεται ο αναγωγικός τύπος από τον οποίο προκύπτει το ανάπτυγμα MacLaurin:

$$a_{n+1} = a_n \cdot (n-1) \cdot \frac{x}{n} \cdot (-1) \ (3.3.12.2)$$

$sum = x$
$oros = x$
$i = 2$
$oldsum = 0$

$Για\ Όσο\ |sum - oldsum| > 10^{-16}$
$oldsum = sum$
$oros = oros * (i-1) \cdot \frac{x}{i} \cdot (-1)$
$sum = sum + oros$
$i = i + 1$

3.3.13 Εφαπτομένη

$$\tan(x), \qquad x \in R : x \neq \pi \cdot n - \frac{\pi}{2}, n \notin Z$$
$$Ανάπτυγμα\ MacLaurin: x + \frac{x^3}{3} + \frac{2\,x^5}{15} + \frac{17\,x^7}{315} + \frac{62\,x^9}{2835} + \cdots x \in \left(-\infty, \pi \cdot n - \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\pi \cdot n - \frac{\pi}{2}, \infty\right) \quad (3.3.13.1)$$

Σε αντίθεση με τις προηγούμενες συναρτήσεις η εύρεση του αναγωγικού τύπου δεν είναι δυνατόν να γίνει με την μέθοδο που παρουσιάζεται για όλες τις προηγούμενες συναρτήσεις, διαιρώντας τους διαδοχικούς όρους του αναπτύγματος.

Για την εύρεση του αναγωγικού τύπου της εφαπτομένης, γίνεται χρήση μιας εναλλακτικής μορφής της συνάρτησης:

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \quad (3.3.13.2)$$

Σε αυτή την εναλλακτική μορφή, αντικαθίσταται ο αναγωγικός τύπος του ημιτόνου και του συνημίτονου ως εξής:

$$\tan(x) = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^2}{(i+2)\cdot\big((i+2)-1\big)}\cdot(-1)}{\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^2}{(i+2)\cdot\big((i+2)-1\big)}\cdot(-1)} \quad (3.3.13.3)$$

Παρατίθεται ο ψευδοκώδικας για τον αλγόριθμο εφαρμόζοντας τον αναγωγικό τύπο:

$sumSeriesSin = x$
$sumSeriesCos = 1$
$sumSeriesTan = 0$
$iCos = 2$
$orosSin = x$
$orosCos = 1$
$i = 3$
$oldSumSin = x$
$oldSumCos = 1$
Για Όσο $|sumSeriesSin - oldSumSin| > 10^{-16}$ *και* $|sumSeriesCos - oldSumCos| > 10^{-16}$
  $oldSumSin = sumSeriesSin$
  $oldSumCos = sumSeriesCos$
  $i = i + 2$
  $iCos = iCos + 2$
  $orosSin = orosSin \cdot \left(\frac{x^2}{i\cdot(i-1)}\right)\cdot(-1)$
  $sumSeriesSin = sumSeriesSin + orosSin$
  $orosCos = orosCos \cdot \left(\frac{x^2}{iCos\cdot(iCos-1)}\right)\cdot(-1)$
  $sumSeriesCos = sumSeriesCos + orosCos$
  $sumSeriesTan = sumSeriesSin/sumSeriesCos$

3.3.14 Υπερβολική εφαπτομένη

$$\tanh(x), \qquad x \in R$$

$$Ανάτπυγμα\ MacLaurin: x - \frac{x^3}{3} + \frac{2\,x^5}{15} - \frac{17\,x^7}{315} + \frac{62\,x^9}{2835} - \cdots\ x \in (-\infty, \infty) \quad (3.3.14.1)$$

Σε αντίθεση με τις προηγούμενες συναρτήσεις η εύρεση του αναγωγικού τύπου δεν είναι δυνατόν να γίνει με την μέθοδο που παρουσιάζεται για όλες τις προηγούμενες συναρτήσεις, διαιρώντας τους διαδοχικούς όρους του αναπτύγματος.

Για την εύρεση του αναγωγικού τύπου της υπερβολικής εφαπτομένης, γίνεται χρήση μιας εναλλακτικής μορφής της συνάρτησης, όπως και στην περίπτωση της εφαπτομένης:

$$\tan h(x) = \frac{e^x - \frac{1}{e^x}}{e^x + \frac{1}{e^x}} \quad (3.3.14.2)$$

Σε αυτή την εναλλακτική μορφή, αντικαθίσταται ο αναγωγικός τύπος του ημιτόνου και του συνημίτονου ως εξής:

$$\tanh(x) = \frac{\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} - \left(\frac{1}{\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}}\right)}{\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} + \left(\frac{1}{\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}}\right)} \quad (3.3.14.3)$$

Παρατίθεται ο ψευδοκώδικας για τον αλγόριθμο εφαρμόζοντας τον αναγωγικό τύπο:

$sumSeries = 1$
$oros = 1$
$i = 1$
$oldSum = 1$
$sumSeriesTanh = 0$
$oldSum = sumSeries$
$i = i + 1$
$Για\ Όσο\ |sumSeries - oldSum| > 10^{-16}$
    $oros = oros \cdot \frac{x}{i}$
    $sumSeries = sumSeries + oros$
    $sumsSeriesTanh = \frac{sumSeries - \frac{1}{sumSeries}}{sumSeries + \frac{1}{sumSeries}}$

3.3 Τετραγωνικό σύστημα εξισώσεων

Μία σημαντική κατηγορία συστημάτων είναι τα συστήματα των οποίων οι σταθεροί όροι των εξισώσεων είναι ίσοι με το μηδέν. Αυτά τα συστήματα λέγονται ομογενή και έχουν την μορφή [8]:

$$\left.\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}\right\} (1.4.3.1)$$

Το ομογενές σύστημα έχει τουλάχιστον μία λύση, η οποία είναι το μηδέν. Η λύση αυτή λέγεται μηδενική ή τετριμμένη λύση.

Ένα σύστημα έχει μοναδική λύση αν και μόνο αν το αντίστοιχο ομογενές σύστημα έχει ως μοναδική λύση την μηδενική λύση. Στην περίπτωση του τετραγωνικού συστήματος $n \cdot n$, το σύστημα έχει μοναδική λύση αν και μόνο αν ο ανηγμένος κλιμακωτός πίνακας του αντίστοιχου ομογενούς συστήματος έχει την μορφή [8]:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ .. & .. & \ldots & .. & .. \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.4.3.2)$$

Ένα σύστημα εξισώσεων είναι τετραγωνικό όταν ο αριθμός των μεταβλητών είναι ίσος με τον αριθμό εξισώσεων. Το τετραγωνικό σύστημα έχει την μορφή $Ax = b$, όπου A είναι ο τετραγωνικός πίνακας συντελεστών a_{ij} και b το διάνυσμα σταθερών όρων [9]. Η επίλυση του συστήματος περιλαμβάνει την εύρεση ενός τετραγωνικού πίνακα nxn τέτοιο ώστε $MA = I$, όπου I ο μοναδιαίος πίνακας. Η επίλυση του συστήματος περιγράφεται με τα εξής διαδοχικά βήματα [9]:

1. $Ax = b$
2. $M(Ax) = Mb$
3. $x = Mb$

Το δεύτερο βήμα δικαιολογείται από την προσεταιριστική ιδιότητα: $M(Ax) = (MA)x = Ix = x$.

Ο πίνακας M είναι ουσιαστικά ο αντίστροφος πίνακας του A. Αν ο A είναι ένας πίνακας διαστάσεων nxn με ορίζουσα $|A| \neq 0$, τότε ο αντίστροφος πίνακας του Α είναι επίσης ένας πίνακας διαστάσεων nxn και ισχύει ότι $A^{-1}A = I_n$ και $A\,A^{-1} = I_n$. Δεδομένου ότι $|A| \neq 0$, ισχύει ότι η μοναδική λύση του συστήματος $Ax = b$ είναι η $x = A^{-1}b$ και ότι η λύση της εξίσωσης $x = Ay$ για κάθε y_i είναι η $y = A^{-1}x$ [9].

Για την εύρεση του αντίστροφου πίνακα A^{-1} χρησιμοποιείται η ορίζουσα $|A|$ και ο συμπληρωματικός πίνακας $adjA$.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}adjA = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}^T \quad (1.4.3.3)$$

3.4 Μέθοδος Gauss – Seidel

Σε συγκεκριμένες περιπτώσεις όπου το σύστημα των εξισώσεων είναι μεγάλο, οι επαναληπτικές μέθοδοι για την επίλυση των εξισώσεων παρουσιάζουν πλεονεκτήματα. Οι μέθοδοι απαλοιφής, όπως η Γκαουσιανή απαλοιφή (Gaussian Elimination), είναι επιρρεπείς σε μεγάλα σφάλματα στρογγυλοποίησης (Round – off error) όταν το σύστημα εξισώσεων είναι μεγάλο. Επιπλέον, όταν το πρόβλημα είναι καλά ορισμένο, οι αρχικές εκτιμήσεις που απαιτούνται στις επαναληπτικές μεθόδους μπορούν να γίνουν με μεγαλύτερη ακρίβεια και να οδηγήσουν σε ταχύτερη σύγκλιση. Οι επαναληπτικές μέθοδοι, όπως είναι η μέθοδος Gauss – Seidel, υλοποιούν μία ακολουθία προσεγγίσεων της λύσης η οποία έχει ως σκοπό να οδηγήσει στην πραγματική λύση [4].

Δεδομένου ενός συνόλου n εξισώσεων και n αγνώστων είναι [4]:

$$\left.\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = c_2 \\ . \\ . \\ . \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots + a_{nn}x_n = c_n \end{cases}\right\} \quad (3.4.1)$$

Εάν τα διαγώνια στοιχεία είναι μη μηδενικά τότε κάθε εξίσωση ξαναγράφεται για τον αντίστοιχο άγνωστο. Δηλαδή, η πρώτη εξίσωση ξαναγράφεται με το x_1 στην αριστερή πλευρά, η δεύτερη εξίσωση ξαναγράφεται με το x_2 στην αριστερή πλευρά κ.ο.κ. [4]:

$$\left.\begin{cases} x_1 = \dfrac{c_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \ldots - a_{1n}x_n}{a_{11}} \\ x_2 = \dfrac{c_2 - a_{21}x_2 - a_{23}x_3 - \ldots - a_{2n}x_n}{a_{22}} \\ . \\ . \\ . \\ x_{n-1} = \dfrac{c_{n-1} - a_{n-1,1}x_1 - a_{n-1,2}x_2 - \ldots - a_{n-1,n-2}x_{n-2} - a_{n-1,n}x_n}{a_{n-1,n-1}} \\ x_n = \dfrac{c_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \ldots - a_{n,n-1}x_{n-1}}{a_{nn}} \end{cases}\right\} \quad (3.4.2)$$

Οι εξισώσεις (3.4.1) μπορούν να γραφούν υπό την μορφή (3.4.2) [4]:

$$x_i = \frac{c_i - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij}x_j}{a_{ii}}, \ i = 1,2,\ldots,n \quad (3.4.3)$$

Προκειμένου να βρεθούν τα x_i, γίνεται μία αρχική εκτίμηση της τιμής τους και στη συνέχεια εφαρμόζονται οι εξισώσεις για να υπολογιστούν οι νέες τιμές. Αξίζει να σημειωθεί ότι πάντα χρησιμοποιούνται οι πιο πρόσφατες εκτιμήσεις για τον υπολογισμό της επόμενης εκτίμησης της τιμής του x_i. Στο τέλος κάθε επανάληψης, υπολογίζεται το απόλυτο σχετικό σφάλμα προσέγγισης για κάθε x_i από την σχέση [4]:

$$|e_a|_i = \left|\frac{x_i^{new} - x_i^{old}}{x_i^{new}}\right| * 100 \quad (3.4.4)$$

Όπου x_i^{new} είναι η πρόσφατη τιμή του x_i και x_i^{old} είναι η προηγούμενη τιμή του x_i. Όταν το απόλυτο σχετικό σφάλμα προσέγγισης για κάθε x_i γίνει μικρότερο από το προκαθορισμένο όριο, οι επαναλήψεις σταματούν [4].

Η λύση μίας συγκεκριμένης κατηγορίας συστημάτων εξισώσεων δεν συγκλίνει πάντα εφαρμόζοντας την μέθοδο Gauss – Seidel. Αυτή η κατηγορία συστημάτων εξισώσεων αναφέρεται στις περιπτώσεις όπου ο πίνακας συντελεστών $[A]$ της σχέσης $[A][X] = [C]$ είναι διαγώνια κυρίαρχος (diagonally dominant) έτσι ώστε [4]:

$$\left\{\begin{array}{l} a_{ii}| \ \geq \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}| \quad \text{για κάθε } i \\ |a_{ii}| \ > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}| \quad \text{για τουλάχιστον ένα } i \end{array}\right\} \quad (3.4.5)$$

Αν ένα σύστημα εξισώσεων έχει έναν πίνακα συντελεστών που δεν είναι διαγώνια κυρίαρχος, τότε το σύστημα μπορεί να συγκλίνει ή να μην συγκλίνει. Πολλά φυσικά συστήματα που καταλήγουν σε γραμμικές εξισώσεις έχουν έναν διαγώνια κυρίαρχο πίνακα συντελεστών, ο οποίος εξασφαλίζει την σύγκλιση για επαναληπτικές μεθόδους επίλυσης γραμμικών εξισώσεων, όπως είναι η μέθοδος Gauss – Seidel [4].

Δεδομένου ενός γραμμικού συστήματος $Ax = B$, όπου A ανήκει στο σύνολο R^{nxn} , θεωρείται η αρχική εκτίμηση της *λύσης* $x^0 \ = \ [x_1^0, x_2^0, \dots \ , x_n^0]^T$. Επίσης ε είναι ο συντελεστής ακρίβειας και n ο μέγιστος αριθμός επαναλήψεων. Ο αλγόριθμος Gauss – Seidel είναι ο εξής [6]:

Για i = 1, 2, …, n

Για j = 1, 2, …, n

$$x_j^{i+1} = (-\sum_{z=1}^{j-1} a_{jz} x_z^{i+1} - \sum_{z=1}^{n} a_{jz} x_z^{i} + b_j) \ / \ a_{jj}$$

Τέλος j

Αν $|x - x^0| < \varepsilon$ *τότε* $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ *STOP*

$x^0 = x$

Τέλος i

Τύπωσε «Μέθοδος μη ακριβής»

Εναλλακτικά, ο αλγόριθμος Gauss – Seidel υλοποιείται με βρόγχο επανάληψης while ως εξής [7]:

Αρχή

Δώσε τυχαίες ή μηδενικές τιμές στα διανύσματα $x^T = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ *και* $oldx^T = (oldx_1, oldx_2, \dots, oldx_n)$

Για όσο $|\, x^T - oldx^T \,| > \varepsilon$ *ή* $\sum_{i=1}^{n}(x_i - oldx_i) > \varepsilon$ *{*

Κράτα τα προηγούμενα x_i *στο* $oldx_i$ *έτσι ώστε* $oldx_i = x_i$ *για* $i = 1,2,\dots,n$

Υπολόγισε τα νέα x_i, $x_i = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j\right), i = 1,2,\dots,n$

Τύπωσε τα x_i, $i = 1,2,\dots,n$

}

Τέλος

Αναλυτικότερα κατά τη μέθοδο Gauss – Seidel, ένα σύστημα $Ax = b$ μπορεί να αναδιατυπωθεί με τον παρακάτω τρόπο:

$$(D + L + U)x = b \quad D, L, U \in R^{n\times n} \quad (3.4.6)$$

Όπου,

D: είναι ο πίνακας που περιέχει τα στοιχεία της κυρίας διαγώνιου του πίνακα A και τα υπόλοιπα στοιχεία είναι 0

L: είναι ο πίνακας που περιέχει τα στοιχεία του πίνακα A, τα οποία βρίσκονται κάτω από την κύρια διαγώνιο και τα υπόλοιπα στοιχεία είναι 0. Ο πίνακας αυτό ονομάζεται κάτω τριγωνικός

U: είναι ο πίνακας που περιέχει τα στοιχεία του πίνακα A τα οποία βρίσκονται πάνω από την κύρια διαγώνιο και τα υπόλοιπα στοιχεία είναι 0. Ο πίνακας αυτός ονομάζεται άνω τριγωνικός.

Η μορφή της παραπάνω εξίσωσης (3.4.1) εκφρασμένη με τη μορφή πινάκων είναι η εξής:

$$\left(\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}\right) \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Χρησιμοποιώντας την επιμεριστική ιδιότητα, ο παραπάνω τύπος (3.4.1) γίνεται ως εξής:

$$Dx + Lx + Ux = b \quad (3.4.7)$$

Επιδιώκουμε να δημιουργήσουμε μια σχέση, κατά την οποία στο αριστερό μέρος της εξίσωσης θα βρίσκεται ο εκάστοτε άγνωστος. Κάνοντας μερικές πράξεις καταλήγουμε την παρακάτω σχέση:

$$Lx + Dx = b - Ux$$
$$(L + D)x = b - Ux$$

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει και ο επαναληπτικός τύπος της μεθόδου Gauss – Seidel:

$$(L + D)x^{k+1} = b - Ux^{k} \quad (3.4.8)$$

Με αυτόν τον τρόπο επιτυγχάνεται και η ιδιαιτερότητα της μεθόδου Gauss – Seidel, που αποτελεί και τη διαφορά της με τη μέθοδο Jacobi, η οποία είναι ότι η τελευταία τιμή του κάθε αγνώστου χρησιμοποιείται στον ίδιο κύκλο και όχι στον επόμενο.

Ο επαναληπτικός τύπος της μεθόδου Gauss – Seidel σε μορφή πινάκων:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1^{k+1} \\ x_2^{k+1} \\ \dots \\ x_n^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Ο νέος πίνακας από την πρόσθεση των πινάκων L και U προκύπτει ως εξής:

$$L + D = \begin{bmatrix} L_{11} + D_{11} & L_{12} + D_{12} & \dots & L_{1n} + D_{1n} \\ L_{21} + D_{21} & L_{22} + D_{22} & \dots & L_{2n} + D_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ L_{1n} + D_{1n} & L_{2n} + D_{2n} & \dots & L_{nn} + D_{nn} \end{bmatrix}$$

Έστω ότι το όνομα του νέου πίνακα $L + U$ είναι A. Ο πίνακας Ax^{k+1} προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό του πίνακα A με τον μονοδιάστατο πίνακα x^{k+1} με τον παρακάτω τρόπο:

$$A \times x^{k+1} = \begin{bmatrix} a_{11} \times x_1^{k+1} & a_{12} \times x_2^{k+1} & \dots & a_{1n} \times x_n^{k+1} \\ a_{21} \times x_1^{k+1} & a_{22} \times x_2^{k+1} & \dots & a_{2n} \times x_n^{k+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} \times x_1^{k+1} & a_{n2} \times x_2^{k+1} & \dots & a_{nn} \times x_n^{k+1} \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας που προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό του παραπάνω πίνακα D με το μονοδιάστατο πίνακα των $x_1, x_2, \dots, x_n$ προκύπτει με τον ίδιο τρόπο, με τον πίνακα $(L + U) \times x^{k+1}$.

Από την ερμηνεία του επαναληπτικού τύπου της μεθόδου Gauss - Seidel και την περιγραφή των επιμέρους πράξεων των πινάκων που έγινε παραπάνω, καταλήγουμε στην εξαγωγή των παρακάτω εξισώσεων:

$$a_{11} \cdot x_1^{k+1} = b_1 - \left(a_{12} \cdot x_2^{k} + a_{13} \cdot x_3^{k} + \dots + a_{1n} \cdot x_n^{k}\right)$$
$$a_{21} \cdot x_1^{k+1} + a_{22} \cdot x_2^{k+1} = b_2 - \left(a_{23} \cdot x_3^{k} + a_{24} \cdot x_4^{k} + \dots + a_{2n} \cdot x_n^{k}\right)$$
$$\dots$$
$$a_{n1} \cdot x_1^{k+1} + a_{n2} \cdot x_2^{k+1} + \dots + a_{n,n-1} \cdot x_{n-1}^{k+1} + a_{nn} \cdot x_n^{k+1} = b_n$$

Προκειμένου να βρούμε τους επιμέρους αγνώστους $x_1^{k+1}, x_2^{k+1}, \dots, x_n^{k+1}$, λύνουμε τις παραπάνω εξισώσεις ως προς αυτούς:

$$x_1^{k+1} = \frac{1}{a_{11}} \cdot \left[b_1 - \left(a_{12} \cdot x_2^{k} + a_{13} \cdot x_3^{k} + \dots + a_{1n} \cdot x_n^{k}\right)\right]$$
$$x_2^{k+1} = \frac{1}{a_{22}} \cdot \left[b_1 - \left(a_{23} \cdot x_3^{k} + a_{24} \cdot x_4^{k} + \dots + a_{2n} \cdot x_n^{k}\right) - a_{21} \cdot x_1^{k+1}\right]$$
$$\dots$$
$$x_n^{k+1} = \frac{1}{a_{nn}} \cdot [b_n - \left(a_{n1} \cdot x_1^{k+1} + a_{n2} \cdot x_2^{k+1} + \dots + a_{n,n-1} \cdot x_{n-1}^{k+1}\right)]$$

Ο γενικός τύπος για την εξίσωση i είναι:

$$x_i^{k+1} = \frac{1}{a_{ii}} \cdot \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \cdot x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} \cdot x_j^k \right) \quad (3.4.9)$$

Για την καλύτερη κατανόηση της μεθόδου Gauss – Seidel , παρουσιάζεται η εφαρμογή της μέσω του παραδείγματος που ακολουθεί.

Έχουμε το σύστημα $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$ με αρχική τιμή $x^0 = [x_1^0, x_2^0, x_3^0] = \left[\frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right]$

Ξεκινάμε με την κατασκευή των πινάκων D, L, U:

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Εφαρμόζοντας τον επαναληπτικό τύπο της μεθόδου Gauss – Seidel $(L + D)x^{k+1} = b - Ux^k$, έχουμε:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1^{k+1} \\ x_2^{k+1} \\ x_3^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ x_3^0 \end{bmatrix}$$

Από το παραπάνω σύστημα προκύπτουν οι εξισώσεις που ακολουθούν για κάθε έναν από τους αγνώστους, λυμένες ως προς τον εκάστοτε άγνωστο:

$$x_1^1 = \frac{1}{2} \cdot [2 - (1 \cdot x_2^0 + (-1) \cdot x_3^0)]$$
$$x_2^1 = \frac{1}{-3} \cdot [-2 - (0 \cdot x_1^1 + 1 \cdot x_3^0)]$$
$$x_3^1 = \frac{1}{4} \cdot [4 - (1 \cdot x_1^1 + (-1) \cdot x_2^1)]$$

Στις εξισώσεις αυτές αντικαθιστούμε τις αρχικές τιμές για τους αγνώστους προκειμένου να βρούμε τις νέες τιμές τους:

$$x_1^1 = \frac{1}{2} \cdot \left[2 - \left(1 \cdot \frac{3}{4} + (-1) \cdot \frac{3}{4}\right)\right] = 1$$
$$x_2^1 = \frac{1}{-3} \cdot \left[-2 - \left(0 \cdot 1 + 1 \cdot \frac{3}{4}\right)\right] = 0.9167$$
$$x_3^1 = \frac{1}{4} \cdot [4 - (1 \cdot 1 + (-1) \cdot 0.9167)] = 0.979169$$

Οι τιμές που βρήκαμε για τα x_1^1, x_2^1, x_3^1 σε αυτόν τον πρώτο κύκλο της μεθόδου θα χρησιμοποιηθούν στον επόμενο κύκλο:

$$x_1^2 = 2 - (1 \cdot 0.9167 + (-1) \cdot 0.979169) = 0.96875$$

$$x_2^2 = -2 - (0 \cdot 0.96875 + 1 \cdot 0.979169) = 0.993$$

$$x_3^2 = 4 - (1 \cdot 0.96875 + (-1) \cdot 0.993) = 0.9939375$$

Οι νέες αυτές τιμές που προέκυψαν στον 2ο κύκλο θα χρησιμοποιηθούν στον 3ο και ούτω καθεξής, μέχρι να ικανοποιηθεί η συνθήκη της ακρίβειας του σφάλματος.

Για το συγκεκριμένο σύστημα, η μέθοδος Gauss – Seidel συγκλίνει γιατί υπάρχει υπεροχή κατά στήλες. Υπεροχή κατά γραμμές ή στήλες σημαίνει ότι κάθε στοιχείο της κυρίας διαγώνιου είναι κατά απόλυτη τιμή μεγαλύτερο από το άθροισμα των δύο άλλων στοιχείων, είτε ως προς τη στήλη είτε ως προς τη γραμμή. Για να συγκλίνει το σύστημα πρέπει να υπάρχει υπεροχή κατά γραμμές ή κατά στήλες. Αυτό θα σημαίνει και ότι ο πίνακας είναι κυρίαρχα διαγώνιος, όπως αναφέρεται παραπάνω.

Για παράδειγμα για το σύστημα του παραδείγματος ισχύει υπεροχή κατά στήλες:

$$|\alpha_{11}| = 2 \geq |\alpha_{21}| + |\alpha_{31}| = |0| + |1| = 1$$

$$|\alpha_{22}| = 3 \geq |\alpha_{12}| + |\alpha_{32}| = |1| + |-1| = 2$$

$$|\alpha_{33}| = 4 \geq |\alpha_{13}| + |\alpha_{23}| = |1| + |-1| = 2$$

3.5 Μέθοδος Jacobi

Μία ακόμη επαναληπτική μέθοδος που υλοποιεί ακολουθία διαδοχικών προσεγγίσεων της λύσης είναι η μέθοδος Jacobi. Η εξίσωση ως προς τον άγνωστο x_i είναι η παρακάτω [5]:

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j\right),\ i = 1, \dots, n \quad (3.5.1)$$

Για μία τυχαία αρχική εκτίμηση $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$, η αναδρομική σχέση για τον υπολογισμός της λύσης είναι:

$$x_i^{(m+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(m)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(m)}\right),\ i = 1, \dots, n,\ \ m = 1, \dots \quad (3.5.2)$$

Η διαφορά της μεθόδου Gauss – Seidel από την μέθοδο Jacobi είναι ότι για τον υπολογισμό του όρου x_i^{m+1} χρησιμοποιούνται οι τιμές $x_1^{m+1},\ x_2^{m+1}, \dots, x_{i-1}^{m+1}$. Τόσο για την μέθοδο Gauss – Seidel όσο και για την μέθοδο Jacobi ισχύει το θεώρημα: «Αν ο πίνακας A των συντελεστών των αγνώστων του γραμμικού συστήματος έχει κυριαρχική διαγώνιο σύμφωνα, τότε οι μέθοδοι Jacobi και Gauss – Seidel συγκλίνουν.

$$|a_{ii}| \ \geq \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}| \ ,\ i, j = 1, \dots, n \quad (3.5.3)$$

Κατά τη μέθοδο Jacobi, ένα σύστημα $Ax = b$ μπορεί να αναδιατυπωθεί με τον παρακάτω τρόπο:

$$(D + L + U)x = b \quad D, L, U \in R^{n\times n} \quad (3.5.4)$$

Όπου,

D: είναι ο πίνακας που περιέχει τα στοιχεία της κυρίας διαγώνιου του πίνακα A και τα υπόλοιπα στοιχεία είναι 0

L: είναι ο κάτω τριγωνικός πίνακας

U: είναι ο άνω τριγωνικός πίνακας

Η μορφή της παραπάνω εξίσωσης (3.5.1) εκφρασμένη με τη μορφή πινάκων είναι η εξής:

$$\left(\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}\right) \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Χρησιμοποιώντας την επιμεριστική ιδιότητα, ο παραπάνω τύπος (3.5.4) γίνεται ως εξής:

$$Dx + Lx + Ux = b \quad (3.5.5)$$

Επιδιώκουμε να δημιουργήσουμε μια σχέση, κατά την οποία στο αριστερό μέρος της εξίσωσης θα βρίσκεται ο εκάστοτε άγνωστος. Κάνοντας μερικές πράξεις καταλήγουμε την παρακάτω σχέση:

$$Dx = b - Lx - Ux$$
$$Dx = b - (L + U)x$$

Από την παραπάνω σχέση, προκύπτει και ο επαναληπτικός τύπος της μεθόδου Jacobi:

$$Dx^{k+1} = b - (L + U)x^k \quad (3.5.6)$$

Και σε μορφή πινάκων ως εξής:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1^{k+1} \\ x_2^{k+1} \\ \dots \\ x_n^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1^k \\ x_2^k \\ \dots \\ x_n^k \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας Dx^{k+1} προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό του πίνακα D με τον μονοδιάστατο πίνακα x^{k+1} με τον παρακάτω τρόπο:

$$D \times x^{k+1} = \begin{bmatrix} a_{11} \times x_1^{k+1} & a_{12} \times x_2^{k+1} & \dots & a_{1n} \times x_n^{k+1} \\ a_{21} \times x_1^{k+1} & a_{22} \times x_2^{k+1} & \dots & a_{2n} \times x_n^{k+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} \times x_1^{k+1} & a_{n2} \times x_2^{k+1} & \dots & a_{nn} \times x_n^{k+1} \end{bmatrix}$$

Ο νέος πίνακας από την πρόσθεση των πινάκων L και U προκύπτει ως εξής:

$$L + U = \begin{bmatrix} L_{11} + U_{11} & L_{12} + U_{12} & \dots & L_{1n} + U_{1n} \\ L_{21} + U_{21} & L_{22} + U_{22} & \dots & L_{2n} + U_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ L_{1n} + U_{1n} & L_{2n} + U_{2n} & \dots & L_{nn} + U_{nn} \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας που προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό του παραπάνω πίνακα $L + U$ με το μονοδιάστατο πίνακα των $x_1, x_2, \dots, x_n$ προκύπτει με τον ίδιο τρόπο, με τον πίνακα $D \times x^{k+1}$.

Από την ερμηνεία του επαναληπτικού τύπου της μεθόδου Jacobi και την περιγραφή των επιμέρους πράξεων των πινάκων που έγινε παραπάνω, καταλήγουμε στην εξαγωγή των παρακάτω εξισώσεων:

$$\alpha_{11} \cdot x_1^{k+1} = b_1 - (a_{12} \cdot x_2^k + a_{13} \cdot x_3^k + \dots + a_{1n} \cdot x_n^k)$$

$$\alpha_{22} \cdot x_1^{k+1} = b_2 - (a_{21} \cdot x_1^k + a_{23} \cdot x_3^k + \dots + a_{2n} \cdot x_n^k)$$

...

$$\alpha_{nn} \cdot x_n^{k+1} = b_n - (a_{n1} \cdot x_n^k + a_{n2} \cdot x_n^k + \cdots + a_{n,n-1} \cdot x_{n-1}^k)$$

Προκειμένου να βρούμε τους επιμέρους αγνώστους $x_1^{k+1}, x_2^{k+1}, \dots, x_n^{k+1}$, λύνουμε τις παραπάνω εξισώσεις ως προς αυτούς:

$$x_1^{k+1} = \frac{1}{\alpha_{11}} \cdot [b_1 - (a_{12} \cdot x_2^k + a_{13} \cdot x_3^k + \cdots + a_{1n} \cdot x_n^k)]$$

$$x_2^{k+1} = \frac{1}{\alpha_{22}} \cdot [b_2 - (a_{21} \cdot x_1^k + a_{23} \cdot x_3^k + \cdots + a_{2n} \cdot x_n^k)]$$

$$\dots$$

$$x_n^{k+1} = \frac{1}{\alpha_{nn}} \cdot [b_n - (a_{n1} \cdot x_n^k + a_{n2} \cdot x_n^k + \cdots + a_{n,n-1} \cdot x_{n-1}^k)]$$

Ο γενικός τύπος για την εξίσωση i είναι:

$$x_i^{k+1} = \frac{1}{a_{ii}} \cdot (b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} \cdot x_j^k) \quad (3.5.7)$$

Για την καλύτερη κατανόηση της μεθόδου Jacobi, παρουσιάζεται η εφαρμογή της μέσω του παραδείγματος που ακολουθεί.

Έχουμε το σύστημα $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$ με αρχική τιμή $x^0 = [x_1^0, x_2^0, x_3^0] = \left[\frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right]$

Ξεκινάμε με την κατασκευή των πινάκων D, L, U:

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Εφαρμόζοντας τον επαναληπτικό τύπο της μεθόδου $Dx^{k+1} = b - (L + U)x^k$, έχουμε:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1^{k+1} \\ x_2^{k+1} \\ x_3^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ x_3^0 \end{bmatrix}$$

Από το παραπάνω σύστημα προκύπτουν οι εξισώσεις που ακολουθούν για κάθε έναν από τους αγνώστους, λυμένες ως προς τον εκάστοτε άγνωστο:

$$x_1^1 = 2 - (1 \cdot x_2^0 + (-1) \cdot x_3^0)$$

$$x_2^1 = -2 - (0 \cdot x_1^0 + 1 \cdot x_3^0)$$

$$x_3^1 = 4 - (1 \cdot x_1^0 + (-1) \cdot x_2^0)$$

Στις εξισώσεις αυτές αντικαθιστούμε τις αρχικές τιμές για τους αγνώστους προκειμένου να βρούμε τις νέες τιμές τους:

$$x_1^1 = 2 - \left(1 \cdot \frac{3}{4} + (-1) \cdot \frac{3}{4}\right) = 1$$

$$x_2^1 = -2 - \left(0 \cdot \frac{3}{4} + 1 \cdot \frac{3}{4}\right) = 0.9167$$

$$x_3^1 = 4 - \left(1 \cdot \frac{3}{4} + (-1) \cdot \frac{3}{4}\right) = 1$$

Οι τιμές που βρήκαμε για τα x_1^1, x_2^1, x_3^1 σε αυτόν τον πρώτο κύκλο της μεθόδου θα χρησιμοποιηθούν στον επόμενο κύκλο:

2ος κύκλος:

$$x_1^2 = 2 - (1 \cdot 0.9167 + (-1) \cdot 1) = 1.04167$$

$$x_2^2 = -2 - (0 \cdot 1 + 1 \cdot 1) = 1$$

$$x_3^2 = 4 - (1 \cdot 1 + (-1) \cdot 0.9167) = 0.97917$$

Οι νέες αυτές τιμές που προέκυψαν στον 2ο κύκλο θα χρησιμοποιηθούν στον 3ο και ούτω καθεξής, μέχρι να ικανοποιηθεί η συνθήκη της ακρίβειας του σφάλματος.

Για το συγκεκριμένο σύστημα, η μέθοδος Jacobi συγκλίνει γιατί υπάρχει υπεροχή κατά στήλες:

$$|\alpha_{11}| = 2 \geq |\alpha_{21}| + |\alpha_{31}| = |0| + |1| = 1$$

$$|\alpha_{22}| = 3 \geq |\alpha_{12}| + |\alpha_{32}| = |1| + |-1| = 2$$

$$|\alpha_{33}| = 4 \geq |\alpha_{13}| + |\alpha_{23}| = |1| + |-1| = 2$$

Ο αλγόριθμος Jacobi για την επίλυση γραμμικού συστήματος εξισώσεων διατυπώνεται ως εξής [7]:

Αρχή

Δώσε τυχαίες ή μηδενικές τιμές στα διανύσματα $x^T = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ *και* $oldx^T = (oldx_1, oldx_2, \dots, oldx_n)$

Για όσο $|\, x^T - oldx^T \,| > \varepsilon$ *ή* $\sum_{i=1}^{n}(x_i - oldx_i) > \varepsilon$ *{*

Κράτα τα προηγούμενα x_i *στο* $oldx_i$ *έτσι ώστε* $oldx_i = x_i$ *για* $i = 1,2, \dots, n$

Υπολόγισε τα νέα x_i, $x_i = \frac{1}{a_{ii}}(b_i - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij} oldx_j)$, $i = 1,2, \dots, n$

Τύπωσε τα x_i, $i = 1,2, \dots, n$

}

Τέλος

3.5.1 Εύρεση αντιστρόφου τετραγωνικού πίνακα με τη μέθοδο Jacobi

Η μέθοδος Jacobi μπορεί να εφαρμοστεί για την εύρεση του αντιστρόφου όπως τετραγωνικού πίνακα.

Η μέθοδος εφαρμόζεται επαναληπτικά για ισάριθμες φορές με όπως διαστάσεις του πίνακα. Για παράδειγμα για ένα πίνακα 3 επί 3, η μέθοδος θα εφαρμοστεί επαναληπτικά 3 φορές. Σε κάθε επανάληψη, ο αλγόριθμος όπως μεθόδου δέχεται ως είσοδο τον τετραγωνικό πίνακα, ως διάνυσμα λύσεων δέχεται τη μοναδιαία μήτρα και τέλος το διάνυσμα των αρχικών εκτιμήσεων των αγνώστων.

Σε κάθε επανάληψη υπολογίζεται και μία νέα στήλη του νέου αντίστροφου πίνακα. Η διαδικασία που ακολουθείται είναι η εξής για κάθε επανάληψη:

1. Γίνεται αρχικοποίηση του πίνακα όπως μοναδιαίας μήτρας με μηδενικά
2. Το στοιχείο i του πίνακα όπως μοναδιαίας μήτρας γίνεται ίσο με 1
3. Το αποτέλεσμα όπως μεθόδου Jacobi αποθηκεύεται σε έναν νέο πίνακα x
4. Η στήλη i του αντιστρόφου πίνακα ενημερώνεται με όπως τιμές του πίνακα x

Ακολουθεί η παραπάνω περιγραφή όπως μεθόδου σε ψευδοκώδικα:

$x0 = [0,0,0]$

$Για\ i < n, \qquad (n\ διαστάσεις\ πίνακα\ n \cdot n)$
$\quad e = [0,0,0]$
$\quad e[i] = 1$
$\quad x = jacobi(A, e, x0), \qquad A: πίνακας, \qquad x0: αρχικές\ προσεγγίσεις$
$\quad inverseMatrix[:, i] = x, \quad ενημέρωση\ της\ στήλης\ i\ με\ το$

$αποτέλεσμα\ της\ μεθόδου\ και\ διατήρηση\ στοιχείων\ των\ άλλων\ στηλών$
$\quad Επέστρεψε\ inverseMatrix$

Για να γίνει καλύτερα κατανοητή η μέθοδος εύρεσης του αντιστρόφου τετραγωνικού πίνακα, παρατίθεται το παρακάτω παράδειγμα:

Έχουμε τον πίνακα $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ με αρχική τιμή $x^0 = [x_1^0, x_2^0, x_3^0] = [0,0,0]$.

Οι διαστάσεις του πίνακα A είναι 3 επί 3, επομένως το n θα είναι ίσο με 3 και τόσες θα είναι και οι επαναλήψεις που θα χρειαστούν για τη μέθοδο.

Για την πρώτη επανάληψη ($n = 0$) εφαρμόζεται η μέθοδος Jacobi, όπως αυτή περιεγράφηκε στο παράδειγμα παραπάνω. Η διαφορά στην προκειμένη περίπτωση είναι το περιεχόμενο του πίνακα λύσεων b. Σε κάθε επανάληψη, ο πίνακας b αρχικοποιείται με όλα του τα στοιχεία να είναι μηδενικά $b[n] = b[3] = [0,0,0]$. Το στοιχείο n του πίνακα b γίνεται ίσο με 1 σε κάθε επανάληψη.

Η πρώτη επανάληψη του αλγορίθμου και όπως μεθόδου Jacobi με παραμέτρους:

$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}, x^0 = [x_1^0, x_2^0, x_3^0] = [0,0,0]\ και\ b = [1,0,0]$, έχει ως αποτέλεσμα τον πίνακα

$x = [0.45833333, -0.04166667, -0.125]$. Το αποτέλεσμα αυτό όπως μεθόδου Jacobi αποτελεί την πρώτη στήλη του αντιστρόφου πίνακα, ο οποίος διαμορφώνεται ως εξής:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0.45833333 & 0 & 0 \\ -0.04166667 & 0 & 0 \\ -0.125 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Για τη δεύτερη επανάληψη ($n = 1$) εφαρμόζεται η μέθοδος Jacobi με παραμέτρους:

$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}, x^0 = [x_1^0, x_2^0, x_3^0] = [0,0,0]\ και\ b = [0,1,0]$ και έχει ως αποτέλεσμα τον πίνακα $x = [0.125, -0.375, -0.125]$. Το αποτέλεσμα αυτό όπως μεθόδου Jacobi αποτελεί την πρώτη στήλη του αντιστρόφου πίνακα, ο οποίος ενημερώνεται και διαμορφώνεται ως εξής:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0.45833333 & 0.125 & 0 \\ -0.04166667 & -0.375 & 0 \\ -0.125 & -0.125 & 0 \end{bmatrix}$$

Για τη Τρίτη και τελευταία επανάληψη ($n = 2$) εφαρμόζεται η μέθοδος Jacobi με παραμέτρους:

$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}, x^0 = [x_1^0, x_2^0, x_3^0] = [0,0,0]\ και\ b = [0,0,1]$ και έχει ως αποτέλεσμα τον πίνακα $x = [0.0833333, -0.375, -0.25]$. Το αποτέλεσμα αυτό όπως μεθόδου Jacobi αποτελεί την πρώτη στήλη του αντιστρόφου πίνακα, ο οποίος ενημερώνεται και διαμορφώνεται τελικά ως εξής:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0.45833333 & 0.125 & 0.08333333 \\ -0.04166667 & -0.375 & 0.08333333 \\ -0.125 & -0.125 & 0.25 \end{bmatrix}$$

και αποτελεί το αποτέλεσμα όπως διαδικασίας.

Για την επαλήθευση όπως μεθόδου πρέπει να ισχύει ότι: $A^{-1} \cdot A = I\ και\ A \cdot A^{-1} = I$.

Χρησιμοποιώντας την βιβλιοθήκη Numpy και την συνάρτηση dot() για την εύρεση του γινομένου του αρχικού πίνακα και του αντιστρόφου του, παίρνουμε τα παρακάτω αποτελέσματα:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 1.00000000e+00 & 5.55111512e-17 & 1.11022302e-16 \\ 2.77555756e-17 & 1.00000000e+00 & -5.55111512e-17 \\ 0.00000000e+00 & 0.00000000e+00 & 1.00000000e+00 \end{bmatrix}$$

και

$$A^{-1} \cdot A = \begin{bmatrix} 1.00000000e+00 & -1.38777878e-16 & 2.22044605e-16 \\ 0.00000000e+00 & 1.00000000e+00 & 1.11022302e-16 \\ 0.00000000e+00 & 0.00000000e+00 & 1.00000000e+00 \end{bmatrix}$$

Από τα παραπάνω, φαίνεται ότι η μέθοδος εύρεσης αντιστρόφου τετραγωνικού πίνακα με τη μέθοδο Jacobi είναι αρκετά αποτελεσματική, εφόσον στον πίνακα που προκύπτει από το γινόμενο των δύο πινάκων, τα στοιχεία όπως κύριας διαγώνιου είναι 1 και τα υπόλοιπα είναι σχεδόν μηδενικά.

Για περαιτέρω επαλήθευση όπως παραπάνω μεθόδου, παρατίθενται τα αποτελέσματα όπως μεθόδου inv() όπως βιβλιοθήκης Numpy, που εκτελεί την ίδια εργασία όπως περιγράφεται στο κεφάλαιο 2.4, με παράμετρο τον πίνακα A καθώς και τα γινόμενα $A^{-1} \cdot A = I\ και\ A \cdot A^{-1} = I$.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0.45833333 & 0.125 & 0.08333333 \\ -0.04166667 & -0.375 & 0.08333333 \\ -0.125 & -0.125 & 0.25 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

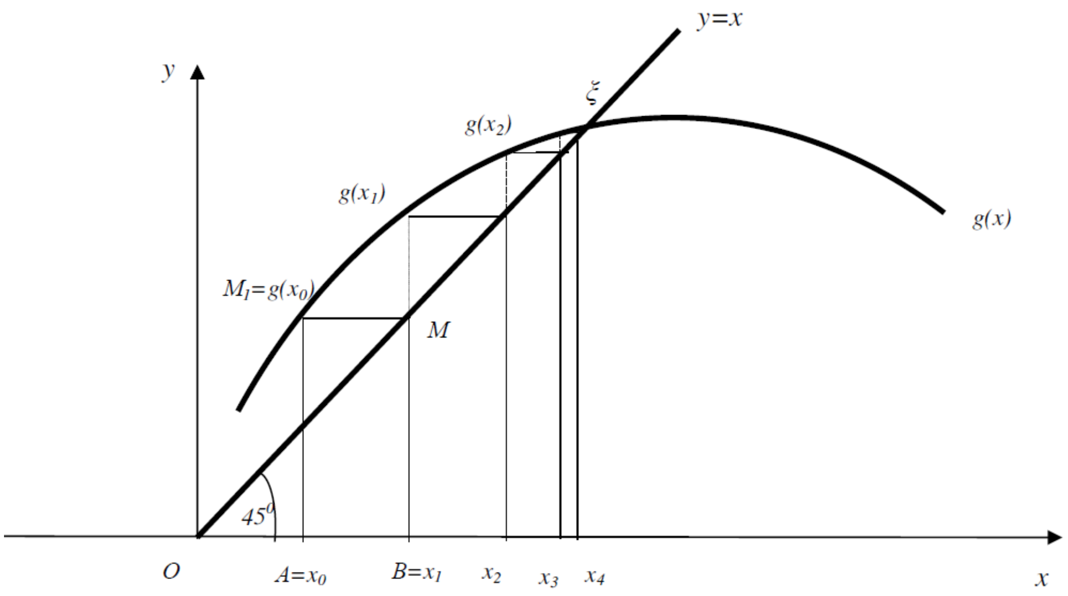
$$A^{-1} \cdot A = \begin{bmatrix} 1.00000000e+00 & -2.77555756e-17 & 5.55111512e-17 \\ 0.00000000e+00 & 1.00000000e+00 & 0.00000000e+00 \\ 0.00000000e+00 & 0.00000000e+00 & 1.00000000e+00 \end{bmatrix}$$

3.6 Αλγόριθμος διαδοχικών προσεγγίσεων

Η μέθοδος Σταθερού Σημείου ή Γενική Επαναληπτική μέθοδος αποτελεί βελτιωμένη έκδοση της μεθόδου της Εσφαλμένης Θέσης και της μεθόδου Διχοτόμησης [7]. Για τον υπολογισμό των προσεγγιστικών τιμών $x_0, x_1, \dots, x_n$ εφαρμόζεται η εξίσωση $x_{n+1} = g(x_n)$, όπου η συνάρτηση $g(x_n)$ είναι μία αναδιάταξη της $f(x) = 0$. Η σύγκλιση αυτής της μεθόδου εξαρτάται από το x_0 και την συνάρτηση $g(x)$ και η σύγκλιση μπορεί να είναι είτε γραμμική είτε τετραγωνική είτε ανώτερης τάξης.

Αν η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία λύση ξ στο διάστημα (a_0, b_0) τότε για τον προσδιορισμό της λύσης ξ απαιτούνται τα εξής βήματα [6]:

- ✓ Αναδιατάσσεται η εξίσωση $f(x) = 0$ έτσι ώστε να προκύψει η συνάρτηση $g(x)$.
- ✓ Προσδιορίζεται ένα x_0 που ανήκει στο διάστημα (a_0, b_0).
- ✓ Στην περίπτωση που $|g(x)| < 1$ εώς ότου επιτευχθεί η ζητούμενη ακρίβεια, προσδιορίζονται προσεγγίσεις της λύσης ξ με τη βοήθεια της σχέση $x_{n+1} = g(x_n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$



Σχήμα 3 Γεωμετρική παράσταση της μεθόδου Σταθερού Σημείου [7]

Η λύση ξ είναι η τομή της συνάρτησης $g(x)$ και της διχοτόμου $y = x$. Η παράλληλη προς τον άξονα x που χαράσσεται από το σημείο $(x_0, g(x_0))$ τέμνει τη διχοτόμο στο σημείο M. Από το σημείο η κάθετη προς τον άξονα x τέμνει την συνάρτηση $g(x)$ στο σημείο $(x_1, g(x_1))$. Επειδή το τρίγωνο BOM είναι ορθογώνιο ισοσκελές, ισχύει ότι $x_1 = g(x_0)$. Η νέα προσέγγιση είναι $x_2 = g(x_1)$ και ακολουθώντας την παραπάνω διαδικασία προκύπτει η ορθή προσέγγιση της λύσης ξ [7].

Ο αλγόριθμος της μεθόδου Διαδοχικών Προσεγγίσεων ορίζεται ως εξής [7]:

Αρχή

Βρες διάστημα $[a, b]$ *τέτοιο ώστε* $f(a) * f(b) < 0$

Υπολόγισε $x = x_0 \in (a, b)$

Όσο $|f(x)| > 10^{-16}$ *και* $|g'(x)| < 1$

Βρες $x = g(x)$

Τέλος

Ισχύουν τα παρακάτω θεωρήματα σχετικά με την τάξη σύγκλισης του αλγορίθμου Διαδοχικών προσεγγίσεων [7]:

1. «Αν η εξίσωση $f(x) = 0$ και η αναδιάταξή της $x = g(x)$ έχει ρίζα το ξ και οι συναρτήσεις $f(x), g(x), g'(x)$ είναι συνεχείς και παραγωγίσιμες στο διάστημα (a, b) για το οποίο ισχύει ότι $|x - \xi| \leq \rho$ για κάθε $x \in (a, b)$ *και* $|g'(x)| \leq \lambda < 1$ για κάθε $x \in (a, b)$ τότε:
   - i. Αν $x_0 \in min((a, \xi), (\xi, b))$ τότε $x_1, x_2, \dots, x_n \in (a, b)$
   - ii. $\lim_{n \to oo} x_n = \xi$
   - iii. Η ρίζα ξ είναι η μοναδική πραγματική ρίζα της $x = g(x)$
   - iv. Η σύγκλιση είναι γραμμική, δηλαδή η τάξη σύγκλισης είναι ίση με 1. »
2. «Αν η εξίσωση $f(x) = 0$ και η αναδιάταξή της $x = g(x)$ έχει ρίζα το ξ και οι συναρτήσεις $f(x), g(x), g'(x), g''(x)$ είναι συνεχείς και παραγωγίσιμες στο διάστημα (a, b) για το οποίο ισχύει ότι $|x - \xi| \leq \rho$ για κάθε $x \in (a, b)$ *και* $|g'(\xi)| = 0 < 1$ και $|g''(\xi)| \neq 0$ τότε:
   - v. Αν $x_0 \in min((a, \xi), (\xi, b))$ τότε $x_1, x_2, \dots, x_n \in (a, b)$
   - vi. $\lim_{n \to oo} x_n = \xi$
   - vii. Η ρίζα ξ είναι η μοναδική πραγματική ρίζα της $x = g(x)$
   - viii. Η σύγκλιση είναι τετραγωνική, δηλαδή η τάξη σύγκλισης είναι ίση με 2. »
3. «Αν η εξίσωση $f(x) = 0$ και η αναδιάταξή της $x = g(x)$ έχει ρίζα το ξ και οι συναρτήσεις $f(x), g(x), g'(x), g''(x), της, g^k(x)$ είναι συνεχείς και παραγωγίσιμες στο διάστημα (a, b) για το οποίο ισχύει ότι $|x - \xi| \leq \rho$ για κάθε $x \in (a, b)$ *και* $|g'(\xi)| = 0, |g''(\xi)| = 0, \dots, |g^{k-1}(\xi)| = 0$ και $|g^k(\xi)| \neq 0$ τότε:
   - ix. Αν $x_0 \in min((a, \xi), (\xi, b))$ τότε $x_1, x_2, \dots, x_n \in (a, b)$
   - x. $\lim_{n \to oo} x_n = \xi$
   - xi. Η ρίζα ξ είναι η μοναδική πραγματική ρίζα της $x = g(x)$
   - xii. Η τάξη σύγκλισης είναι ίση με k. »

3.6.1 Μελέτη σύγκλισης

Με βάση τα παραπάνω θεωρήματα, γίνεται η μελέτη τετραγωνικής σύγκλισης των ακόλουθων εξισώσεων: $x^2 - a = 0,\ x^3 - a = 0\ και\ \ x^n - a = 0$ και ακολουθούν παραδείγματα εφαρμογής της μεθόδου Διαδοχικών Προσεγγίσεων για την καλύτερη κατανόησή της.

Έστω η εξίσωση $x^2 - a = 0$ και η αναδιάταξή της $x - \frac{1}{2} \cdot \left(x + \frac{\alpha}{x}\right) \equiv g(x)$ και έχει ρίζα τον αριθμό $\xi \neq 0$.

Αρχικά επαληθεύουμε ότι η $x - \frac{1}{2} \cdot \left(x + \frac{4}{x}\right) \equiv g(x)$ αποτελεί αναδιάταξη της $x^2 - a = 0$ κάνοντας τις απαραίτητες πράξεις προκειμένου από τη μία σχέση να καταλήξουμε στην άλλη:

$$x - \frac{1}{2} \cdot \left(x + \frac{\alpha}{x}\right) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \cdot \left(x + \frac{\alpha}{x}\right) = 0 \Rightarrow 2x = x + \frac{\alpha}{x} \Rightarrow 2x^2 = x^2 + \alpha \Rightarrow x^2 - \alpha = 0$$

Άρα ισχύει η αναδιάταξη.

Προκειμένου να αποδειχθεί η ύπαρξη τετραγωνικής σύγκλισης πρέπει να ισχύουν οι παρακάτω δύο προϋποθέσεις:

$$g'(\xi) = 0\ και\ g''(\xi) \neq 0$$

Επομένως παραγωγίζουμε την $g(x)$ από την οποία προκύπτει:

$$g'(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{a}{x^2}\right) \quad (3.6.1.1)$$

Από την αντικατάσταση της ρίζας ξ στην παράγωγο της $g'(x)$ προκύπτει η παρακάτω εξίσωση:

$$g'(\xi) = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{a}{\xi^2}\right) \quad (3.6.1.2)$$

η οποία είναι πάντα 0, εφόσον ο δεύτερος όρος της παραγώγου της αναδιάταξης είναι $\frac{\alpha}{\xi^2}$.

Εφόσον ικανοποιείται η πρώτη προϋπόθεση για την απόδειξη της τετραγωνικής σύγκλισης, πρέπει να αποδειχθεί ότι και η $g''(\xi) \neq 0$. Από την παραγώγιση της $g'(x)$ προκύπτει:

$$g''(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a \cdot 2 \cdot x}{x^4}\right) = \frac{2 \cdot a}{x^3} \quad (3.6.1.3)$$

για την οποία ισχύει $g''(\xi) \neq 0$. Επομένως, εφόσον ισχύουν και οι δύο προϋποθέσεις, αποδεικνύεται ότι υπάρχει τετραγωνική σύγκλιση.

Η ίδια διαδικασία ακολουθείται και για την απόδειξη της τετραγωνικής σύγκλισης της εξίσωσης $x^3 - a = 0$.

Έστω η εξίσωση $x^3 - a = 0$ και η αναδιάταξή της $x - \frac{1}{3} \cdot \left(2 \cdot x + \frac{\alpha}{x^2}\right) \equiv g(x)$ και έχει ρίζα τον αριθμό $\xi \neq 0$.

Αρχικά επαληθεύουμε ότι η $x - \frac{1}{3} \cdot \left(2x + \frac{a}{x^2}\right) \equiv g(x)$ αποτελεί αναδιάταξη της $x^3 - a = 0$ κάνοντας τις απαραίτητες πράξεις προκειμένου από τη μία σχέση να καταλήξουμε στην άλλη:

$$x - \frac{1}{3} \cdot \left(2x + \frac{a}{x^2}\right) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3} \cdot \left(2x + \frac{a}{x^2}\right) = 0 \Rightarrow x = \frac{2x}{3} + \frac{a}{3x^2} \Rightarrow \frac{3x^3}{3x^2} = \frac{2x^3}{3x^2} + \frac{a}{3x^2} \Rightarrow 3x^3 = 2x^3 + a \Rightarrow 3x^3 - 2x^3 - a = 0 \Rightarrow x^3 - a = 0$$

Άρα ισχύει η αναδιάταξη.

Προκειμένου να αποδειχθεί η ύπαρξη τετραγωνικής σύγκλισης πρέπει να ισχύουν οι παρακάτω δύο προϋποθέσεις:

$$g'(\xi) = 0 \; και \; g''(\xi) \neq 0$$

Επομένως παραγωγίζουμε την $g(x)$ από την οποία προκύπτει:

$$g'(x) = \frac{1}{3} \cdot \left(2 - \frac{2 \cdot \alpha}{x^3}\right) \quad (3.6.1.4)$$

Από την αντικατάσταση της ρίζας ξ στην παράγωγο της $g'(x)$ προκύπτει η παρακάτω εξίσωση:

$$g'(\xi) = \frac{1}{3} \cdot \left(2 - \frac{2 \cdot \alpha}{\xi^3}\right) \quad (3.6.1.5)$$

η οποία είναι πάντα 0, εφόσον ο δεύτερος όρος της παραγώγου της αναδιάταξης είναι $\frac{2 \cdot \alpha}{\xi^3}$.

Εφόσον ικανοποιείται η πρώτη προϋπόθεση για την απόδειξη της τετραγωνικής σύγκλισης, πρέπει να αποδειχθεί ότι και η $g''(\xi) \neq 0$. Από την παραγώγιση της $g'(x)$ προκύπτει:

$$g''(x) = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{\alpha \cdot 3 \cdot x^2}{x^6}\right) = \frac{\alpha}{x^4} \quad (3.6.1.6)$$

για την οποία ισχύει $g''(\xi) \neq 0$. Επομένως, εφόσον ισχύουν και οι δύο προϋποθέσεις, αποδεικνύεται ότι υπάρχει τετραγωνική σύγκλιση.

Τέλος, με όμοιο τρόπο αποδεικνύεται και σύγκλισης της εξίσωσης $x^n - a = 0$.

Έστω η εξίσωση $x^n - a = 0$ και η αναδιάταξή της $x - \frac{1}{n} \cdot \left((n-1) \cdot x + \frac{\alpha}{x^{n-1}}\right) \equiv g(x)$ και έχει ρίζα τον αριθμό $\xi \neq 0$.

Αρχικά επαληθεύουμε ότι η $x - \frac{1}{n} \cdot \left((n-1) \cdot x + \frac{a}{x^{n-1}}\right) \equiv g(x)$ αποτελεί αναδιάταξη της $x^n - a = 0$ κάνοντας τις απαραίτητες πράξεις προκειμένου από τη μία σχέση να καταλήξουμε στην άλλη:

$$x - \frac{1}{n} \cdot \left((n-1) \cdot x + \frac{a}{x^{n-1}}\right) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{n} \cdot \left((n-1) \cdot x + \frac{a}{x^{n-1}}\right) \Rightarrow x = \frac{(n-1) \cdot x}{n} + \frac{a}{n \cdot x^{n-1}}$$
$$\Rightarrow \frac{n \cdot x^n}{n \cdot x^{n-1}} = \frac{(n-1) \cdot x^n}{n \cdot x^{n-1}} + \frac{a}{n \cdot x^{n-1}} \Rightarrow n \cdot x^n = (n-1) \cdot x^n + a$$
$$\Rightarrow n \cdot x^n - (n-1) \cdot x^n - a = 0 \Rightarrow x^n - a = 0$$

Άρα ισχύει η αναδιάταξη.

Προκειμένου να αποδειχθεί η ύπαρξη τετραγωνικής σύγκλισης πρέπει να ισχύουν οι παρακάτω δύο προϋποθέσεις:

$$g'(\xi) = 0 \; και \; g''(\xi) \neq 0$$

Επομένως παραγωγίζουμε την $g(x)$ από την οποία προκύπτει:

$$g'(x) = \frac{1}{n} \cdot \left((n-1) - \frac{\big(a \cdot (n-1)\big) \cdot n \cdot x^{n-2}}{(n \cdot x^{n-1})^2}\right)$$

$$g'(x) = \frac{1}{n} \cdot \left((n-1) - \frac{a \cdot n^2 \cdot x^{n-2} - a \cdot n \cdot x^{n-2}}{(n \cdot x^{n-1})^2} \right)$$
$$g'(x) = \frac{1}{n} \cdot \left((n-1) - \frac{a \cdot n \cdot x^{n-2} \cdot (n-1)}{n^2 \cdot x^{2n-2}} \right)$$
$$g'(x) = \frac{1}{n} \cdot \left((n-1) - \frac{a \cdot (n-1)}{x^n} \right) \quad (3.6.1.7)$$

Από την αντικατάσταση της ρίζας ξ στην παράγωγο της $g'(x)$ προκύπτει η παρακάτω εξίσωση:

$$g'(\xi) = \frac{1}{n} \cdot \left((n-1) - \frac{a \cdot (n-1)}{\xi^n} \right) \quad (3.6.1.8)$$

η οποία είναι πάντα 0, εφόσον ο δεύτερος όρος της παραγώγου της αναδιάταξης είναι $\frac{a \cdot (n-1)}{\xi^n}$.

Εφόσον ικανοποιείται η πρώτη προϋπόθεση για την απόδειξη της τετραγωνικής σύγκλισης, πρέπει να αποδειχθεί ότι και η $g''(\xi) \neq 0$. Από την παραγώγιση της $g'(x)$ προκύπτει:

$$g''(x) = \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{a \cdot (n-1) \cdot n \cdot \xi^{n-1}}{\xi^{2n}} \right) \quad (3.6.1.9)$$

για την οποία ισχύει $g''(\xi) \neq 0$. Επομένως, εφόσον ισχύουν και οι δύο προϋποθέσεις, αποδεικνύεται ότι υπάρχει τετραγωνική σύγκλιση.

Προκειμένου να γίνει καλύτερα κατανοητή η μέθοδος Διαδοχικών Προσεγγίσεων, παρατίθεται το παρακάτω παράδειγμα[7]:

Έστω η εξίσωση $x^2 - 4 = 0$ και η αναδιάταξή της $x - \frac{1}{2} \cdot \left(x + \frac{4}{x}\right) \equiv g(x)$, έχει ρίζα το $\xi = 2$ στο διάστημα $I = \left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right)$ για το οποίο ισχύει $|x - \xi| \leq 0.5 = \rho, \forall x \in I$ και $|g'(\xi)| = 0$, τότε η ακολουθία $x_0, x_1, \ldots, x_n \in I$ συγκλίνει στη μοναδική πραγματική ρίζα της $x = g(x)$ στο διάστημα $I = \left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right)$ και η σύγκλιση είναι τετραγωνική.

Αρχικά επαληθεύουμε ότι η $x - \frac{1}{2} \cdot \left(x + \frac{4}{x}\right) \equiv g(x)$ αποτελεί αναδιάταξη της $x^2 - 4 = 0$ κάνοντας τις απαραίτητες πράξεις προκειμένου από τη μία σχέση να καταλήξουμε στην άλλη:

$$x - \frac{1}{2} \cdot \left(x + \frac{4}{x}\right) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \cdot \left(x + \frac{4}{x}\right) = 0 \Rightarrow 2x = x + \frac{4}{x} \Rightarrow 2x^2 = x^2 + 4 \Rightarrow x^2 - 4 = 0$$

Άρα ισχύει η αναδιάταξη.

Προκειμένου να αποδείξουμε ότι ισχύει το πρώτο θεώρημα της μεθόδου διαδοχικών προσεγγίσεων για την τάξη σύγκλισης και να αποδειχθεί ότι η τάξη σύγκλισης είναι γραμμική (τάξη σύγκλισης = 1) πρέπει να ισχύει η παρακάτω σχέση:

$$g'(x) \leq \lambda < 1$$

Επομένως παραγωγίζουμε την $g(x)$ και βρίσκουμε τα $g'(\alpha)$ και $g'(\beta)$, όπου α και β είναι τα άκρα του διαστήματος I:

$$g'(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{4}{x^2}\right)$$

$$g'\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{4}{\left(\frac{3}{2}\right)^2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{4}{\frac{9}{4}}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{16}{9}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{7}{9}\right) = -\frac{7}{18}$$

$$g'\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{4}{\left(\frac{7}{2}\right)^2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{4}{\frac{49}{4}}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{16}{499}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{33}{49}\right) = \frac{33}{98}$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι:

$$-\frac{7}{18} \leq g'(x) \leq \frac{33}{98}$$

Κατά απόλυτη τιμή ισχύει:

$$|g'(x)| \leq \left|\frac{33}{98}\right| \leq \left|\frac{7}{18}\right|$$

Άρα η g'(x) είναι συνεχής στο διάστημα *I* διότι ισχύει:

$$|g'(x)| \leq \left|\frac{7}{18}\right| = \lambda < 1$$

Επομένως εφόσον ισχύει ότι $g'(x) \leq \lambda < 1$ και $|x - \xi| \leq 0.5 = \rho$ σημαίνει ότι ισχύουν οι προϋποθέσεις το πρώτου θεωρήματος, οπότε η μέθοδος συγκλίνει και η σύγκλιση είναι γραμμική.

Αν εφαρμόσουμε τη μέθοδο για να βρούμε τη ρίζα με ακρίβεια 1 δεκαδικού ψηφίου για $x_0 = \frac{3}{2}$, έχουμε:

$$x_1 = g(x_0) = \frac{1}{2} \cdot \left(x_0 + \frac{4}{x_0}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{2} + \frac{4}{\frac{3}{2}}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{2} + \frac{8}{3}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{25}{6} = \frac{25}{12} = 2.083333 \in I$$

$$|\varepsilon_1| = |x_1 - \xi| = |2.083333 - 2| = 0.08 > 0.05 = \frac{1}{2} \cdot 10^{-1}$$

$$x_2 = g(x_1) = \frac{1}{2} \cdot \left(x_1 + \frac{4}{x_1}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{25}{12} + \frac{4}{\frac{25}{12}}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{25}{12} + \frac{48}{25}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1201}{300} = 2.001666 \in I$$

$$|\varepsilon_2| = |x_2 - \xi| = |2.001666 - 2| = 0.001666 < 0.05 = \frac{1}{2} \cdot 10^{-1}$$

Προκειμένου να αποδείξουμε ότι ισχύει το δεύτερο θεώρημα της μεθόδου διαδοχικών προσεγγίσεων για την τάξη σύγκλισης και να αποδειχθεί ότι η τάξη σύγκλισης είναι τετραγωνική (τάξη σύγκλισης = 2) πρέπει να ισχύουν τα παρακάτω:

$$g'(\xi) = 0 < 1 \; \kappa\alpha\iota \; g''(\xi) \neq 0$$

Υπολογίζουμε $g'(\xi) = g'(2) = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{4}{2^2}\right) = 0$

Υπολογίζουμε τη δεύτερη παράγωγο της $g(x)$ και στη συνέχεια το $g''(\xi)$:

$$g''(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{4 \cdot 2 \cdot x}{x^4}\right) = \frac{4}{x^3}$$

$$g''(\xi) = g''(2) = \frac{4}{2^3} = \frac{1}{2} \neq 0$$

Επίσης υπολογίζουμε και $\tau\alpha$ $g''(\alpha)$ και $g''(\beta)$:

$$g''\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{4}{\left(\frac{3}{2}\right)^3} = \frac{4}{\frac{27}{8}} = \frac{32}{27}$$

$$g''\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{4}{\left(\frac{7}{2}\right)^3} = \frac{4}{\frac{343}{8}} = \frac{32}{343}$$

Ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος οπότε υπολογίζουμε M για $x = 3/2$ και $|b - a|$:

$$\frac{1}{2} \cdot |g''(x)| \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{32}{27} = \frac{16}{27} = M\ \kappa\alpha\iota\ |b - a| = \left|\frac{7}{2} - \frac{3}{2}\right| = 2$$

Επομένως $\lambda = M \cdot |b - a| = \frac{16}{27} \cdot 2 = \frac{32}{27} > 1$

Εφόσον δεν ισχύει $\lambda < 1$, βρίσκουμε το μέσο του αρχικού διαστήματος $I = \left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right)$:

$$x_\mu = \frac{\frac{3}{2} + \frac{7}{2}}{2} = \frac{5}{2}$$

Τα νέα διαστήματα που προκύπτουν είναι:

$$\left(\frac{3}{2}, x_\mu\right) \kappa\alpha\iota \left(x_\mu, \frac{7}{2}\right)$$

Εκ των οποίων, επιλέγουμε το διάστημα που περιέχει τη ρίζα, που είναι το $\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$. Υπολογίζουμε ξανά $g''(\alpha)$ και $g''(\beta)$ με τις τιμές του νέου διαστήματος:

$$g''\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{4}{\left(\frac{3}{2}\right)^3} = \frac{4}{\frac{27}{8}} = \frac{32}{27}$$

$$g''\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{4}{\left(\frac{5}{2}\right)^3} = \frac{4}{\frac{125}{8}} = \frac{32}{125}$$

Οπότε,

$$\frac{1}{2} \cdot g''(x) \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{32}{27} = \frac{16}{27} = M < 1\ \kappa\alpha\iota\ |b - a| = \left|\frac{5}{2} - \frac{3}{2}\right| = 1$$

Επομένως $\lambda = M \cdot |b - a| = \frac{16}{27} \cdot 1 = \frac{16}{27} < 1$, άρα η ακολουθία συγκλίνει και αφού $g'(\xi) = 0\ \kappa\alpha\iota\ g''(\xi) \neq 0$, η σύγκλιση είναι τετραγωνική.

Αν εφαρμόσουμε τη μέθοδο για την ακρίβεια, για $x_0 = \frac{3}{2}$, έχουμε:

$$x_1 = g(x_0) = \frac{1}{2} \cdot \left(x_0 + \frac{4}{x_0}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{2} + \frac{4}{\frac{3}{2}}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{2} + \frac{8}{3}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{25}{6} = \frac{25}{12} = 2.083333 \in I$$

$$|\varepsilon_1| = |x_1 - \xi| = |2.083333 - 2| = 0.08 > 0.05 = \frac{1}{2} \cdot 10^{-1}$$

$$x_2 = g(x_1) = \frac{1}{2} \cdot \left(x_1 + \frac{4}{x_1}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{25}{12} + \frac{4}{\frac{25}{12}}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{25}{12} + \frac{48}{25}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1201}{300} = 2.001666 \in I$$

$$|\varepsilon_2| = |x_2 - \xi| = |2.001666 - 2| = 0.001666 < 0.005 = \frac{1}{2} \cdot 10^{-2}$$

Με όμοιο τρόπο μπορούμε να αποδείξουμε το τρίτο θεώρημα της μεθόδου Διαδοχικών προσεγγίσεων για την τάξη σύγκλισης, δηλαδή ότι η τάξη σύγκλισης είναι k, πρέπει αποδείξουμε ότι:

$$g'(\xi) = 0, g''(\xi) = 0, \ldots, g^{k-1}(\xi) = 0 \ \kappa\alpha\iota \ g^k(\xi) \neq 0$$

Ακολουθεί παρόμοιο παράδειγμα για την μελέτη τετραγωνικής σύγκλισης εξίσωσης τρίτου βαθμού:

Έστω η εξίσωση $x^3 - 64 = 0$ και η αναδιάταξή της $x - \frac{1}{3} \cdot \left(2 \cdot x + \frac{64}{x^2}\right) \equiv g(x)$, έχει ρίζα το $\xi = 4$ στο διάστημα $I = (2, 5)$

Αρχικά επαληθεύουμε ότι η $x - \frac{1}{3} \cdot \left(2 \cdot x + \frac{64}{x^2}\right) \equiv g(x)$ αποτελεί αναδιάταξη της $x^3 - 64 = 0$ κάνοντας τις απαραίτητες πράξεις προκειμένου από τη μία σχέση να καταλήξουμε στην άλλη:

$$x - \frac{1}{3} \cdot \left(2 \cdot x + \frac{64}{x^2}\right) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3} \cdot \left(2 \cdot x + \frac{64}{x^2}\right) = 0 \Rightarrow 3x = 2 \cdot x + \frac{64}{x^2} \Rightarrow 3x^3 = 2 \cdot x^3 + 64$$
$$\Rightarrow x^3 - 64 = 0$$

Άρα ισχύει η αναδιάταξη.

Προκειμένου να αποδείξουμε ότι ισχύει το πρώτο θεώρημα της μεθόδου διαδοχικών προσεγγίσεων και ότι η μέθοδος συγκλίνει, πρέπει να ισχύει:

$$g'(x) \leq \lambda < 1$$

Επομένως παραγωγίζουμε την g(x) και βρίσκουμε τα g'(α) και g'(β), όπου α και β είναι τα άκρα του διαστήματος *I*:

$$g'(x) = \frac{1}{3} \cdot \left(2 - \frac{128}{x^3}\right)$$
$$g'(2) = \frac{1}{3} \cdot \left(2 - \frac{128}{(2)^3}\right) = \frac{1}{3} \cdot \left(2 - \frac{128}{8}\right) = \frac{1}{3} \cdot (2 - 16) = -\frac{14}{3}$$
$$g'(5) = \frac{1}{3} \cdot \left(2 - \frac{128}{(5)^3}\right) = \frac{1}{3} \cdot \left(2 - \frac{128}{125}\right) = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{250 - 128}{125}\right) = \frac{122}{375}$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι:

$$-\frac{14}{3} \leq g'(x) \leq \frac{122}{375}$$

Άρα η g'(x) είναι συνεχής στο διάστημα *I* διότι ισχύει:

$$|g'(x)| \leq \left|\frac{122}{375}\right| = \lambda < 1$$

Επομένως εφόσον ισχύει ότι $g'(x) \leq \lambda < 1$ και $|x - \xi| \leq 0.5 = \rho$ σημαίνει ότι ισχύουν οι προϋποθέσεις το πρώτου θεωρήματος, οπότε η μέθοδος συγκλίνει.

Προκειμένου να αποδείξουμε ότι ισχύει το δεύτερο θεώρημα της μεθόδου διαδοχικών προσεγγίσεων για την τάξη σύγκλισης και να αποδειχθεί ότι η τάξη σύγκλισης είναι τετραγωνική (τάξη σύγκλισης = 2) πρέπει να ισχύουν τα παρακάτω:

$$g'(\xi) = 0 < 1 \ \kappa\alpha\iota \ g''(\xi) \neq 0$$

Υπολογίζουμε $g'(\xi) = g'(2) = \frac{1}{3} \cdot \left(2 - \frac{64}{4^3}\right) = 0$

Υπολογίζουμε τη δεύτερη παράγωγο της $g(x)$ και στη συνέχεια $\textit{το}\ g''(\xi)$:

$$g''(x) = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{384}{x^4}\right) = \frac{384}{3 \cdot x^4}$$
$$g''(\xi) = g''(4) = \frac{384}{3 \cdot 4^4} = \frac{384}{768} \neq 0$$

Επίσης υπολογίζουμε και τα $g''(\alpha)\ \textit{και}\ g''(\beta)$:

$$g''(2) = \frac{384}{3 \cdot 2^4} = \frac{384}{48} = 8$$
$$g''(5) = \frac{384}{3 \cdot 5^4} = \frac{384}{3 \cdot 625} = \frac{384}{1875}$$

Ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος οπότε υπολογίζουμε M για $x = 5$ και $|b - a|$:

$$\frac{1}{2} \cdot |g''(x)| \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{384}{1875} = \frac{384}{3750} = M\ \textit{και}\ |b - a| = |5 - 2| = 3$$

Επομένως $\lambda = M \cdot |b - a| = \frac{384}{3750} \cdot 3 = \frac{1152}{3750} < 1$

Άρα, η ακολουθία συγκλίνει και αφού $g'(\xi) = 0\ \textit{και}\ g''(\xi) \neq 0$, η σύγκλιση είναι τετραγωνική.

Ακολουθεί παρόμοιο παράδειγμα για την μελέτη τετραγωνικής σύγκλισης εξίσωσης νιοστού βαθμού:

Έστω η εξίσωση $x^6 - 64 = 0$ και η αναδιάταξή της $x - \frac{1}{6} \cdot \left(5 \cdot x + \frac{64}{x^5}\right) \equiv g(x)$, έχει ρίζα το $\xi = 2$ στο διάστημα $I = (1, 3)$

Αρχικά επαληθεύουμε ότι η $x - \frac{1}{6} \cdot \left(5 \cdot x + \frac{64}{x^5}\right) \equiv g(x)$ αποτελεί αναδιάταξη της $x^6 - 64 = 0$ κάνοντας τις απαραίτητες πράξεις προκειμένου από τη μία σχέση να καταλήξουμε στην άλλη:

$$x - \frac{1}{6} \cdot \left(5 \cdot x + \frac{64}{x^5}\right) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{6} \cdot \left(5 \cdot x + \frac{64}{x^5}\right) = 0 \Rightarrow 6x = 5 \cdot x + \frac{64}{x^5} \Rightarrow 6x^6 = 5 \cdot x^6 + 64$$
$$\Rightarrow x^6 - 64 = 0$$

Άρα ισχύει η αναδιάταξη.

Προκειμένου να αποδείξουμε ότι ισχύει το πρώτο θεώρημα της μεθόδου διαδοχικών προσεγγίσεων και ότι η μέθοδος συγκλίνει, πρέπει να ισχύει:

$$g'(x) \leq \lambda < 1$$

Επομένως παραγωγίζουμε την $g(x)$ και βρίσκουμε τα $g'(\alpha)$ και $g'(\beta)$, όπου α και β είναι τα άκρα του διαστήματος *I*:

$$g'(x) = \frac{1}{6} \cdot \left(5 - \frac{320}{x^6}\right)$$
$$g'(1) = \frac{1}{6} \cdot \left(5 - \frac{320}{1^6}\right) = \frac{1}{6} \cdot (5 - 320) = -\frac{315}{6}$$
$$g'(3) = \frac{1}{6} \cdot \left(5 - \frac{320}{3^6}\right) = \frac{1}{6} \cdot \left(5 - \frac{320}{729}\right) = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{3330}{729}\right) = \frac{3330}{4374}$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι:

$$-\frac{315}{6} \leq g'(x) \leq \frac{3330}{4374}$$

Άρα η g'(x) είναι συνεχής στο διάστημα *I* διότι ισχύει:

$$|g'(x)| \leq \left|\frac{3330}{4374}\right| = \lambda < 1$$

Επομένως εφόσον ισχύει ότι $g'(x) \leq \lambda < 1$ και $|x-\xi| \leq 0.5 = \rho$ σημαίνει ότι ισχύουν οι προϋποθέσεις το πρώτου θεωρήματος, οπότε η μέθοδος συγκλίνει.

Προκειμένου να αποδείξουμε ότι ισχύει το δεύτερο θεώρημα της μεθόδου διαδοχικών προσεγγίσεων για την τάξη σύγκλισης και να αποδειχθεί ότι η τάξη σύγκλισης είναι τετραγωνική (τάξη σύγκλισης = 2) πρέπει να ισχύουν τα παρακάτω:

$$g'(\xi) = 0 < 1 \; \kappa\alpha\iota \; g''(\xi) \neq 0$$

Υπολογίζουμε $g'(\xi) = g'(2) = \frac{1}{6} \cdot \left(5 - \frac{320}{2^6}\right) = 0$

Υπολογίζουμε τη δεύτερη παράγωγο της $g(x)$ και στη συνέχεια το $g''(\xi)$:

$$g''(x) = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1920}{x^7}\right) = \frac{1920}{6 \cdot x^7}$$
$$g''(\xi) = g''(2) = \frac{1920}{6 \cdot 2^7} = \frac{1920}{768} \neq 0$$

Επίσης υπολογίζουμε και τα $g''(\alpha) \; \kappa\alpha\iota \; g''(\beta)$:

$$g''(1) = \frac{1920}{6 \cdot 1^7} = 320$$
$$g''(3) = \frac{1920}{6 \cdot 3^7} = \frac{1920}{6 \cdot 2187} = \frac{1920}{13122}$$

Ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος οπότε υπολογίζουμε M για $x = 3 \; \kappa\alpha\iota \; |b-a|$:

$$\frac{1}{2} \cdot |g''(x)| \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1920}{13122} = \frac{1920}{26244} = M \; \kappa\alpha\iota \; |b-a| = |3-1| = 2$$

Επομένως $\lambda = M \cdot |b-a| = \frac{1920}{26244} \cdot 2 = \frac{3840}{16244} < 1$

Άρα, η ακολουθία συγκλίνει και αφού $g'(\xi) = 0 \; \kappa\alpha\iota \; g''(\xi) \neq 0$, η σύγκλιση είναι τετραγωνική.

3.6.2 Εύρεση ρίζας αριθμού με τη μέθοδο των Διαδοχικών Προσεγγίσεων

Η μέθοδος διαδοχικών προσεγγίσεων μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για τον υπολογισμό της τετραγωνικής, κυβικής ή n-οστής ρίζας ενός αριθμού εφόσον[18]

$$x = \sqrt[n]{a} \; \rightarrow x^n - a = 0 \quad (3.6.2.1)$$

Έστω για παράδειγμα ότι θέλουμε να βρούμε την τετραγωνική ρίζα ενός αριθμού. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2$[19]. Για $f(x) = 0$ έχουμε $x^2 - 2 = 0$. Για να βρούμε την αναδιάταξη της συνάρτησης μετασχηματίζουμε την παραπάνω συνάρτηση ως εξής:

$$x^2 - 2 = 0 \Rightarrow 2x^2 - x^2 - 2 = 0 \Rightarrow 2x^2 = x^2 + 2 \Rightarrow \frac{2x^2}{2x} = \frac{x^2}{2x} + \frac{2}{2x} \Rightarrow x = \frac{x}{2} + \frac{2}{2x} \Rightarrow x = \frac{1}{2} \cdot \left(x + \frac{2}{x}\right) \quad (3.6.2.2)$$

Επομένως από τον επαναληπτικό τύπο της μεθόδου, έχουμε:

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{2}{x_0}\right) = \frac{1}{2}\left(2 + \frac{2}{2}\right) = 1.5$$
$$x_2 = \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{2}{x_1}\right) = \frac{1}{2}\left(1.5 + \frac{2}{1.5}\right) \approx 1.416666667$$
$$x_3 = 1.414215686$$
$$x_4 = 1.414213562$$
$$x_5 = 1.414213562$$

Στις επαναλήψεις 4 και 5 το αποτέλεσμα είναι το ίδιο, άρα δεν είναι πιθανό το αποτέλεσμα να αλλάξει σε επόμενη επανάληψη. Μπορούμε να συμπεράνουμε επομένως ότι η τετραγωνική ρίζα του 2 είναι περίπου ίση με 1.414213562.

Με την παραπάνω σχέση της αναδιάταξης της συνάρτησης μπορούμε να βρούμε την τετραγωνική ρίζα οποιοδήποτε αριθμού α.

Αντίστοιχα για την κυβική ρίζα, για μια συνάρτηση $f(x) = x^3 - a$, βρίσκουμε την αναδιάταξη ως εξής:

$$x^3 - a = 0 \Rightarrow 3x^3 - 2x^3 - a = 0 \Rightarrow 3x^3 = 2x^3 + a \Rightarrow \frac{3x^3}{3x^2} = \frac{2x^3}{3x^2} + \frac{a}{3x^2} \Rightarrow x = \frac{2x}{3} + \frac{a}{3x^2} \Rightarrow x = \frac{1}{3} \cdot \left(2x + \frac{a}{x^2}\right) \quad (3.6.2.3)$$

Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να υπολογίσουμε και την n-οστή ρίζα ενός αριθμού. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^n - a$, βρίσκουμε την αναδιάταξη ως εξής:

$$x^n - a = 0 \Rightarrow n \cdot x^n - (n-1) \cdot x^n - a = 0 \Rightarrow n \cdot x^n = (n-1) \cdot x^n + a \Rightarrow \frac{n \cdot x^n}{n \cdot x^{n-1}} = \frac{(n-1) \cdot x^n}{n \cdot x^{n-1}} + \frac{a}{n \cdot x^{n-1}} \Rightarrow x = \frac{(n-1) \cdot x}{n} + \frac{a}{n \cdot x^{n-1}} \Rightarrow x = \frac{1}{n} \cdot \left((n-1) \cdot x + \frac{a}{x^{n-1}}\right) \quad (3.6.2.4)$$

Παρατίθεται ο αλγόριθμος εύρεσης νιοστής ρίζας αριθμού με τη μέθοδο διαδοχικών προσεγγίσεων:

$oldx = 0$

$x = \frac{1}{a}$

$Για\ Όσο\ |x - old| > 10^{-16}$

  $oldx = x$

  $x = \frac{1}{n} \cdot \left((n-1) \cdot x + \frac{a}{x^{n-1}}\right)$

$Επέστρεψε\ x$

Βιβλιογραφία

[1] K. A. Lambert, *Fundamentals of Python: First Programs*.

[2] F. COPES, *PYTHON HANDBOOK*.

[3] Blacksacademy.net Learning System, *Maclaurin's Theorem*, https://www.blacksacademy.net

[4] Autar Kaw, *Introduction to Matrix Algebra*, 2022, http://mathforcollege.com/ma/book2021/index.html

[5] Τμήμα πληροφορικής Α.Π.Θ, *Αριθμητική Ανάλυση*, 2007.

[6] Ι. Φαμέλης, *Αριθμητική Ανάλυση*, 2014, https://ocp.teiath.gr/

[7] Κ. Γουλιάνας: *Αριθμητική Ανάλυση & Προγραμματισμός Επιστημονικών Εφαρμογών:* Θεωρία και Παραδείγματα και Άλυτες Ασκήσεις. 2011.

[8] Μ. Μαλιάκας, Μ. Αδάμ, *Παραδείγματα και Ασκήσεις Γραμμικής Άλγεβρας*, https://eclass.uoa.gr/

[9] MIT OpenCourseWare, *18.02SC Multivariable Calculus*, 2010 https://ocw.mit.edu/

[10] "Python Language advantages and applications & Difference Between Compiler and Interpreter", GeeksforGeeks, https://www.geeksforgeeks.org/

[11] R. Hazrat, *A Course in Python: The Core of the Language*. Cham, Switzerland: Springer, 2023.

[12] Peter Magyar, *Taylor Series*, https://users.math.msu.edu/ .

[13] S. Lipschutz and M. Lipson, *Schaum's Outline of Theory and Problems of Linear Algebra*. New York: McGraw-Hill, 2009.

[14] S. S. Ray, *Numerical Analysis with Algorithms and Programming*. Boca Raton: CRC Press, 2018.

[15] "Visual Studio Code Review, Developer.com, https://www.developer.com/languages/visual-studio-code-review/

[16] Kia Eisinga, *How to create a Python library*, https://medium.com

[17] Python Math Module, W3Schools https://www.w3schools.com/python/module_math.asp

[18] Πιτσούλης Λεωνίδας, *Εισαγωγή στην Αριθμητική Ανάλυση 2η έκδοση,* Εκδόσεις Τζιόλα 2016

[19] Gilbert Strang & Edwin "Jed" Herman, *Newton's Method, https://math.libretexts.org*